LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

DÉTERMINATION DE LA PERMÉABILILÉ APPARENTE ET DU FACTEUR DE QUALITÉ EN HAUTE FRÉQUENCE D'UNE POUDRE MAGNÉTIQUE

Par A. COLOMBANI.

Sommaire. — Le but de ce travail a été de calculer la perméabilité apparente μ_a et le facteur de qualité Q_F d'une poudre dont les grains magnétiques et conducteurs assimilés à des « particules » ou « grains » sphériques se trouvent noyés dans un milieu isolant. L'ensemble est soumis à un champ magnétique périodique et uniforme dont la fréquence peut atteindre plusieurs mégacycles.

Le problème a consisté à calculer d'abord les champs résultants extérieurs et intérieurs à une seule particule. Puis, en adoptant l'hypothèse de Lorentz sur le champ efficace et uniforme, à appliquer les résultats obtenus à un milieu dans lequel la distribution des particules est supposée uniforme. Les résultats donnent évidemment une perméabilité apparente complexe d'où l'on déduit aisément le coefficient de qualité $Q_F = -\frac{\mu_r}{\mu_i}$ et le facteur de réduction de flux $\eta = \frac{\mu_r}{\mu_{0_a}}$. Les calculs sont longs et assez délicats, mais ils permettent d'obtenir des solutions, fonctions de la fréquence, de la perméabilité, de la conductibilité et de la grosseur du « gain », en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

Considérons une sphère de conductibilité γ, de perméabilité μ et de pouvoir inducteur spécifique ε placée dans un milieu isolant ($\gamma_1 = 0$, μ_1, ε_1). Sur cette sphère agit un champ magnétique uniforme et sinusoïdal de pulsation ω telle que la longueur d'onde des oscillations correspondantes

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\omega}\,\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} \qquad (c = 3.10^{10}\ \text{cm:s})$$

soit grande par rapport au diamètre de la sphère.

Nous nous proposons tout d'abord de calculer les valeurs du champ électrique et du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

Pour nous permettre d'expliciter les conditions aux limites, nous adopterons les coordonnées sphériques ayant pour centre celui de la sphère, le champ inducteur $\vec{\mathcal{H}} = H_0 e^{j\omega t}$ étant dirigé suivant l'axe des z (*fig.* 1).

Nous appellerons

$$\vec{\mathcal{H}} = H\, e^{j\omega t} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{E}} = h\, e^{j\omega t}$$

le champ magnétique et le champ électrique (H et h sont indépendants du temps). Les inductions correspondantes seront

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu\vec{\mathcal{H}} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{E}} = \varepsilon\vec{\mathcal{E}}.$$

Nous supposerons que les quantités μ et ε sont constantes et le champ inducteur assez faible pour éviter la saturation si la sphère est ferromagnétique.

Si ρ est la densité de charge et $\vec{i}$ la densité de courant, les équations de l'électromagnétisme qui s'écrivent en U. E. M. :

$$\text{rot}\,\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\text{rot}\,\vec{\mathcal{H}} = 4\pi\vec{i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t}, \qquad \text{avec} \quad \vec{i} = \gamma\vec{\mathcal{E}}, \tag{2}$$

$$\text{div}\,\vec{\mathcal{B}} = 0, \tag{3}$$

$$\text{div}\,\vec{\mathcal{E}} = 4\pi c^2\rho \tag{4}$$

se réduisent évidemment aux seules équations (1) et (2), si l'on suppose les solutions harmoniques et si l'on tient compte de la condition de conser-

vation du courant

$$\operatorname{div} \vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

D'autre part, les conditions de symétrie permettent d'écrire

$$\vec{\mathcal{E}}_r = 0, \qquad \vec{\mathcal{E}}_\theta = 0, \qquad \vec{\mathcal{H}}_\varphi = 0.$$

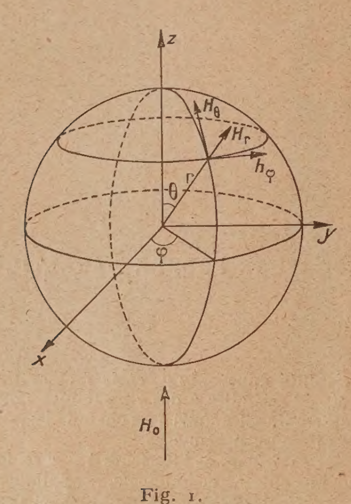


Fig. 1.

Les équations (1) et (2) se réduisent alors aux suivantes :

$$\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(h_\varphi \sin\theta) + j\omega\mu H_r = 0, \tag{3}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r h_\varphi) + j\omega\mu H_\theta = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \theta} - \left(4\pi\gamma + \frac{j\varepsilon\omega}{c^2}\right) h_\varphi = 0. \tag{5}$$

Les équations (3) et (4) donnent H_r et H_θ en fonction de h_φ. En tenant compte de cela (5) se transforme en une équation (8) à laquelle doit satisfaire le seul champ h_φ:

$$H_r = -\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(h_\varphi \sin\theta)\frac{1}{j\mu\omega}, \tag{6}$$

$$H_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r h_\varphi)\frac{1}{j\mu\omega}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial (r h_\varphi)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(h_\varphi \sin\theta)\right] + \left(-j4\pi\mu\gamma\omega + \frac{\omega^2\mu\varepsilon}{c^2}\right) h_\varphi = 0. \tag{8}$$

Nous poserons

$$K = \sqrt{\frac{\omega^2\mu\varepsilon}{c^2} - j4\pi\mu\omega\gamma}, \tag{9}$$

et nous nous placerons dans le cas du régime quasi stationnaire, c'est-à-dire que nous négligerons le courant de déplacement devant celui de conduction. Comme nous l'avons déjà vu, cela est parfaitement admissible jusqu'aux fréquences les plus élevées ($f = 10^{11}$ par exemple, c'est-à-dire $\lambda = 3$ mm). N'oublions pas cependant que la longueur d'onde correspondant à ces fréquences doit être nettement plus grande que le diamètre $2a$ de la sphère, de façon à pouvoir définir une région dans laquelle on puisse admettre l'uniformité du champ [1]. Ainsi nos exemples porteront sur les diamètres de l'ordre de quelques microns qui sont utilisés dans la technique haute fréquence.

Remarquons qu'à l'extérieur de la sphère on a

$$\gamma = 0, \qquad \mu = \mu_1, \qquad \varepsilon = \varepsilon_1.$$

Donc

$$K = \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\,\frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_1}, \qquad \text{avec} \quad c_1 = \frac{c}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}},$$

c_1 est la vitesse de la lumière dans le milieu extérieur.

Posons également

$$r h_\varphi \sin\theta = S.$$

L'équation (8) devient

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2}\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial S}{\partial\theta} + K^2 S = 0. \tag{10}$$

Suivant la méthode classique, remplaçons S par le produit des fonctions $R_{(r)}$ et $\Theta_{(\theta)}$ qui ne dépendent chacune que de r ou que de θ et divisons tous les termes obtenus par $R_{(r)}\,\Theta_{(\theta)}$. On obtient

$$\frac{1}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\operatorname{cotg}\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + K^2 = 0. \tag{11}$$

Comme on sait, cette équation se décompose en deux équations qui sont

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \operatorname{cotg}\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + L\Theta = 0, \tag{12}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(K^2 - \frac{L}{r^2}\right) R = 0. \tag{13}$$

Il est bien connu que la première équation n'a de solution régulière en θ que si

$$L = l(l+1) \qquad (l = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Si L a l'une de ces valeurs, une discussion assez simple de cette équation montre que sa solution qui est liée aux polynomes associés de Legendre est

$$\Theta_l^0 = -\sin\theta P_l^1(\cos\theta). \tag{14}$$

La seconde équation

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[K^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0 \tag{15}$$

peut se transformer en posant

$$R = f(r)\, r^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad u = Kr$$

en une équation de Bessel

$$\frac{d^2f}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{df}{du}+\left[1-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]f=0.$$

La seule solution de cette équation d'ordre $l+\frac{1}{2}$ qui reste régulière pour $r=0$, est $J_{l+\frac{1}{2}}(Kr)$. La solution de l'équation (15) est donc

$$R=Mr^{\frac{1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(Kr) \qquad (M \text{ étant une constante}).$$

La solution générale à l'intérieur de la sphère est donc

$$S_i=-Mr^{\frac{1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(Kr)\sin\theta P_l^1(\cos\theta), \tag{16}$$

avec

$$S=rh_\varphi\sin\theta.$$

A l'extérieur de la sphère, *si l'on néglige le courant de déplacement*, on a $K=0$. Donc (15) devient

$$\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}R=0,$$

qui admet pour solution

$$R=\beta_1r^{l+1}+\frac{\beta_2}{r^l}.$$

A l'extérieur de la sphère, la solution générale est donc

$$S_e=-\left(\beta_1r^{l+1}+\frac{\beta_2}{r^l}\right)\sin\theta P_l^1(\cos\theta), \tag{17}$$

avec

$$S=rh_\varphi\sin\theta.$$

Remarquons que la continuité de h_φ exige d'autre part la même valeur pour l dans (16) et (17).

Calcul de l et de β_1. — A l'infini on doit trouver pour H_r et H_θ des valeurs indépendantes de r qui sont respectivement

$$H_r=H_0\cos\theta \qquad \text{et} \qquad H_\theta=-H_0\sin\theta. \tag{18}$$

Or (6) et (7) donnent, avec (17),

$$H_r=\frac{-1}{r^2\sin\theta j\omega\mu_1}\frac{\partial S}{\partial\theta}=\frac{1}{j\omega\mu_1\sin\theta}\left[\beta_1r^{l-1}+\frac{\beta_2}{r^{l+1}}\right]\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta P_l^1(\cos\theta)],$$

$$H_\theta=\frac{1}{r\sin\theta j\omega\mu_1}\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{-P_l^1(\cos\theta)}{j\omega\mu_1}\left[(l+1)\beta_1r^{l-1}-\frac{\beta_2 l}{r^{l+2}}\right].$$

Pour que H_r et H_θ soient indépendants de r à l'infini, il faut donc $l=1$.

Dans ces conditions, comme $P_1^1(\cos\theta)=-\sin\theta$, on en tire

$$S_e=\left(\beta_1r^2+\frac{\beta_2}{r}\right)\sin^2\theta.$$

Enfin, avec $l=1$ et par l'intermédiaire de la condition à l'infini (18), on déduit

$$\beta_1=-\frac{H_0}{2}j\omega\mu_1.$$

On a donc finalement les solutions suivantes :

A l'intérieur de la sphère :

$$S_i=Mr^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(Kr)\sin^2\theta.$$

A l'extérieur de la sphère :

$$S_e=\left(\beta_1r^2+\frac{\beta_2}{r}\right)\sin^2\theta.$$

Avec

$$J_{\frac{3}{2}}(Kr)=\left(\frac{2Kr}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{Kr}\left[\frac{\sin Kr}{Kr}-\cos Kr\right],$$

on déduit finalement

$$S_i=M\sqrt{\frac{2}{\pi K}}\left[\frac{\sin Kr}{Kr}-\cos Kr\right]\sin^2\theta, \tag{19}$$

$$S_e=\left(\beta_1r^2+\frac{\beta_2}{r}\right)\sin^2\theta. \tag{20}$$

Calcul des champs. — Dans la sphère l'équation (19) nous donne

$$h_\varphi=\frac{S_i}{r\sin\theta}=M\sqrt{\frac{2}{\pi K}}\frac{\sin\theta}{r}\left[\frac{\sin Kr}{Kr}-\cos Kr\right].$$

Puis par (6) et (7)

$$H_r=\frac{2j}{\mu\omega}M\sqrt{\frac{2}{\pi K}}\frac{\cos\theta}{r^2}\left[\frac{\sin Kr}{Kr}-\cos Kr\right],$$

$$H_\theta=\frac{-jM}{\mu\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi K}}K\frac{\sin\theta}{r}\times\left[\frac{\cos Kr}{Kr}+\sin Kr\left(1-\frac{1}{K^2r^2}\right)\right]. \tag{21}$$

A l'extérieur de la sphère des calculs identiques portant sur S_e donnent

$$h_\varphi=\frac{S_e}{r\sin\theta}=\left(-\frac{H_0}{2}j\mu_1\omega r+\frac{\beta_2}{r^2}\right)\sin\theta,$$

$$H_r=H_0\cos\theta+\frac{2j\beta_2}{\mu_1\omega r^3}\cos\theta,$$

$$H_\theta=-H_0\sin\theta+\frac{j\beta_2}{\mu_1\omega r^3}\sin\theta. \tag{22}$$

Posons dès maintenant

$$M\sqrt{\frac{2}{\pi K}}=NH_0 \qquad \text{et} \qquad \beta_2=BH_0.$$

Déterminations des constantes N et B. —

L'expression de la continuité des composantes tangentielles h_φ et H_θ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère de rayon a fournit les deux équations suivantes :

Continuité de h_φ :

$$H_0 N(\sin Ka - Ka\cos Ka) = BH_0 K - j\mu_1 a^3 \omega \frac{KH_0}{2}.$$

Continuité de H_θ :

$$H_0 N[(K^2a^2 - 1)\sin Ka + Ka\cos Ka] = -BH_0 K\frac{\mu}{\mu_1} - j\mu\omega K a^3 H_0.$$

Ces deux équations sont suffisantes pour déterminer N et B. On trouve

$$N = -\frac{3}{2} j\mu\mu_1 \omega a^3 K \frac{1}{K^2a^2\mu_1 \sin Ka + (\mu - \mu_1)[\sin Ka - Ka\cos Ka]}, \tag{23}$$

$$B = j\frac{\mu_1}{2}\omega a^3 \left\{ 1 - 3\mu \frac{\sin Ka - Ka\cos Ka}{K^2a^2\mu_1 \sin Ka + (\mu - \mu_1)[\sin Ka - Ka\cos Ka]} \right\}. \tag{24}$$

Utilisation des fonctions de Bessel d'ordre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$. — En partant des relations suivantes :

$$\sin Kr = \left(\frac{\pi Kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(Kr),$$

$$\frac{\sin Kr}{Kr} - \cos Kr = \left(\frac{\pi Kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Kr),$$

$$\left(\frac{3}{K^2r^2} - 1\right)\sin Kr - \frac{3}{Kr}\cos Kr = \left(\frac{\pi Kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{5}{2}}(Kr),$$

on obtient pour les composantes des champs intérieurs à la sphère

$$h_\varphi = -\frac{j\mu\omega}{2} H_0 \sin\theta\, T r^{\frac{1}{2}} \left[J_{\frac{1}{2}}(Kr) + J_{\frac{5}{2}}(Kr)\right], \tag{25}$$

$$H_r = H_0 T \cos\theta\, r^{-\frac{1}{2}} \left[J_{\frac{1}{2}}(Kr) + J_{\frac{5}{2}}(Kr)\right], \tag{26}$$

$$H_\theta = H_0 T \sin\theta\, r^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} J_{\frac{5}{2}}(Kr) - J_{\frac{1}{2}}(Kr)\right], \tag{27}$$

avec

$$T = \frac{jNK}{3\mu\omega}(2\pi K)^{\frac{1}{2}}.$$

Chaque fois que cela sera possible, nous supprimerons l'indice (Kr) ou (Ka) des fonctions J afin d'alléger l'écriture. Nous aurons donc pour T, N, B les valeurs suivantes :

$$T = \frac{3\mu_1 a^{\frac{1}{2}}}{(2\mu_1 + \mu)J_{\frac{1}{2}} + (\mu - \mu_1)J_{\frac{5}{2}}}, \tag{28}$$

$$N = -\frac{9j\mu\mu_1\omega a^{\frac{1}{2}}}{K(2\pi K)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(2\mu_1 + \mu)J_{\frac{1}{2}} + (\mu - \mu_1)J_{\frac{5}{2}}}, \tag{29}$$

$$B = \frac{j\mu_1\omega a^3}{2}\left[\frac{2(\mu_1 - \mu)J_{\frac{1}{2}} - (2\mu + \mu_1)J_{\frac{5}{2}}}{(2\mu_1 + \mu)J_{\frac{1}{2}} + (\mu - \mu_1)J_{\frac{5}{2}}}\right]. \tag{30}$$

Remarquons dès maintenant que pour des valeurs de K très faibles on peut utiliser les développements en série de

$$J_{\frac{1}{2}}(Kr) \sim \left(\frac{2Kr}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{K^2r^2}{6}\right),$$

$$J_{\frac{5}{2}}(Kr) \sim \left(\frac{2Kr}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{K^2r^2}{6}.$$

Ce qui donne

$$T \sim \frac{3\mu_1}{(2\mu_1 + \mu)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$T\left[J_{\frac{1}{2}}(Kr) + J_{\frac{5}{2}}(Kr)\right] = \frac{3\mu_1 r^{\frac{1}{2}}}{2\mu_1 + \mu}.$$

D'où

$$H_r = \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu}\cos\theta\, H_0,$$

$$H_\theta = \frac{-3\mu_1}{2\mu_1 + \mu}\sin\theta\, H_0,$$

$$h_\varphi = -\frac{j\mu\omega}{2}\frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu} r\sin\theta\, H_0.$$

La composante H_z parallèle à Oz a donc pour valeur

$$H_z = -H_\theta \sin\theta + H_r\cos\theta = \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu} H_0.$$

Pour $\mu_1 = 1$ l'induction vaut donc

$$B_z = \frac{3\mu}{\mu + 2} H_0.$$

Nous retrouvons bien un résultat classique concernant l'action d'un champ magnétique constant sur une sphère isolée de perméabilité μ.

Calcul de l'aimantation. — Appelons H_z la résultante suivant Oz des champs H_r et H_θ

$$H_z = -H_\theta \sin\theta + H_r\cos\theta = H_0 T r^{-\frac{1}{2}} \left\{ J_{\frac{5}{2}}(Kr)\left[\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right] + J_{\frac{1}{2}}(Kr) \right\}.$$

L'aimantation correspondante suivant Oz est par unité de volume

$$dI = \frac{\mu - 1}{4\pi} H_z\, dv.$$

L'aimantation pour toute la sphère de rayon a est donc

$$I = H_0 T \frac{(\mu - 1)}{4\pi} \times \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{-\frac{1}{2}} \left\{ J_{\frac{5}{2}}(Kr)\left[1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right] + J_{\frac{1}{2}}(Kr) \right\} \times r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

soit

$$I = H_0 T(\mu - 1)\left[\int_0^a r^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Kr)\,dr - \frac{3}{K}\int_0^a r^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Kr)\,dr\right],$$

qui, en tenant compte de la relation

$$J_{\frac{3}{2}}(Kr) = \frac{Kr}{3}\left[J_{\frac{1}{2}}(Kr) + J_{\frac{5}{2}}(Kr)\right]$$

donne sans difficultés

$$I = H_0 \frac{T}{K}(\mu - 1) a^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Ka),$$

En posant

$$\alpha = \frac{T}{K}(\mu - 1) a^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Ka), \qquad (31)$$

on aura donc

$$I = \alpha H_0,$$

le coefficient α caractérisant à la fréquence considérée le degré d'aimantation que la sphère est susceptible d'acquérir.

Application. — Considérons un milieu isolant de perméabilité unité dans lequel sont noyées un grand nombre de granules ou particules sphériques semblables à la sphère déjà étudiée. Leur densité de répartition est supposée constante et leur diamètre identique pourra être compris entre une fraction de micron et quelques dizaines de microns.

Il est bien évident que si les distances mutuelles des particules sont extrêmement grandes, l'aimantation totale est la somme des aimantations individuelles.

Le problème est différent, si, les distances sont petites. Il faut alors tenir compte des influences qu'exercent sur la particule étudiée toutes les autres particules de la substance qui sont, elles aussi, polarisées.

Or, le champ réel dit efficace F qui agit sur une particule est celui qui existerait en ce lieu si l'on supposait que cette particule en fut enlevée sans troubler l'état des autres particules. Si nous considérons l'ensemble de la substance, hors de la particule, comme *aimantée d'une façon homogène* $\mathcal{J}$, ce qui n'est qu'une première approximation, puisque les particules sont en nombre fini quoique très grand; la quantité de matière extérieure à la particule sphérique agit comme si sa superficie portait une charge de densité $-\mathcal{J}_n$ (n normale extérieure).

Un calcul classique donne pour le champ engendré à l'intérieur de la sphère par une telle distribution $\frac{4\pi}{3}\mathcal{J}$, le coefficient $\frac{4\pi}{3}$ est le coefficient de Lorentz.

Nous admettrons donc comme valable pour notre cas le raisonnement utilisé pour Becker sur les diélectriques : aussi longtemps qu'on peut assimiler les effets mutuels des particules à ceux de dipôles ponctuels, le champ efficace qui agit sur une particule individuelle est donné par

$$F = H_0 + \frac{4\pi}{3}\mathcal{J} \quad (^1).$$

Tant que la répartition des champs ne sera pas perturbée par des contacts entre particules résultant d'une densité de répartition trop élevée, cette hypothèse sera d'autant plus justifiée que le diamètre des particules sera plus faible et leur nombre par unité de volume plus grand.

Calcul de la perméabilité apparente et des facteurs de qualité et de réduction de flux. — Appelons N le nombre de particules par centimètre cube, a leur rayon, τ le volume total qu'elles occupent dans 1 cm³. On a

$$\mathcal{J} = NI = \frac{3\tau}{4\pi a^3} I \qquad (\tau \text{ varie de 0 à 1}).$$

D'après le raisonnement précédent, nous considérerons F au lieu de H_0. Donc

$$I = \alpha F \qquad \text{et} \qquad \mathcal{J} = N\alpha F = \frac{3\tau\alpha}{4\pi a^3}\left[H_0 + \frac{4\pi}{3}\mathcal{J}\right].$$

D'où

$$\mathcal{J} = H_0 \frac{3\tau\alpha}{4\pi a^3\left(1 - \frac{\tau\alpha}{a^3}\right)}.$$

L'induction apparente est donc

$$B_{ap} = H_0 + 4\pi\mathcal{J} = H_0\left(1 + \frac{3\tau\alpha}{a^3 - \tau\alpha}\right).$$

Et la perméabilité apparente

$$\mu_a = \frac{B_{ap}}{H_0} = \frac{a^3 + 2\tau\alpha}{a^2 - \tau\alpha}.$$

Remplaçons α par sa valeur tirée de (28) et (31) en remarquant que

$$J_{\frac{3}{2}}(Ka) = \frac{Ka}{3}\left[J_{\frac{1}{2}}(Ka) + J_{\frac{5}{2}}(Ka)\right].$$

En supprimant l'indice (Ka) pour alléger l'écriture on déduit

$$\mu_a = \frac{[\mu + 2 + 2\tau(\mu - 1)]J_{\frac{1}{2}} + (\mu - 1)(1 + 2\tau)J_{\frac{5}{2}}}{[\mu + 2 - \tau(\mu - 1)]J_{\frac{1}{2}} + (\mu - 1)(1 - \tau)J_{\frac{5}{2}}}. \qquad (32)$$

Nous pouvons dès maintenant remarquer que pour de très faibles valeurs de Ka (*basse fréquence*) les développements en série limités au second ordre des fonctions $J_{\frac{1}{2}}$ (Ka) et $J_{\frac{5}{2}}$ (Ka) donnent pour la

(¹) $\mathcal{J}$ est l'aimantation présente dans la matière. Cette formule s'applique rigoureusement pour le réseau régulier et en moyenne pour des corps amorphes dans le cas des diélectriques (8).

perméabilité apparente la valeur

$$\mu_{0_a} = \frac{3 + (\mu - 1)(2\tau + 1)}{3 + (\mu - 1)(1 - \tau)}. \qquad (33)$$

Elle est indépendante de Ka.

En particulier, si $\tau = 1$ on retrouve bien $\mu_{0_a} = \mu$ et si $\tau = 0$ on a $\mu_{0_a} = 1$. Si μ est très grand avec $\tau \neq 1$, μ_{0_a} tend vers

$$\mu_{0_a} = \frac{2\tau + 1}{\tau - 1}.$$

Si Ka n'est pas petit, μ_a présente une partie réelle et une partie imaginaire.

Posons

$$s = \sqrt{2\pi\mu\omega\gamma}\, a \qquad \left(\text{ce qui revient à écrire } Ka = s\sqrt{2}\right).$$

On a

$$J_{\frac{1}{2}}(Ka) = \left[\frac{\sqrt{2j}}{\pi s}\right]^{\frac{1}{2}} [\sin s \cosh s - j \cos s \sinh s],$$

$$J_{\frac{3}{2}}(Ka) = \left[\frac{\sqrt{2j}}{\pi s}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3j}{2s^2} - 1\right) [\sin s \cosh s - j \cos s \sinh s]$$
$$- \frac{3}{2s}(1 + j)[\cos s \cosh s + j \sin s \sinh s].$$

En transportant ces valeurs dans l'expression générale de μ_a et en séparant les parties réelle et imaginaire on aboutit après un long calcul aux expressions suivantes :

$$\mu_r = \frac{\left\{\begin{array}{c}(\mu - 1)^2(1 - \tau)(1 + 2\tau)[1 + 2s^2R - 2sP] \\ + 4s^4 + 2s^3(\mu - 1)(2 + \tau)Q\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}(\mu - 1)^2(1 - \tau)^2[1 + 2s^2R - 2sP] \\ + 4s^4 + 4s^3(\mu - 1)(1 - \tau)Q\end{array}\right\}}, \qquad (34)$$

$$\mu_i = 3\tau(\mu - 1)s^2 \frac{1 - sP}{\left\{\begin{array}{c}(\mu - 1)^2(1 - \tau)^2[1 + 2s^2R - 2sP] \\ + 4s^4 + 2s^3(\mu - 1)(1 - \tau)Q\end{array}\right\}}, \qquad (35)$$

expressions dans lesquelles on a posé

$$P = \frac{\sinh 2s + \sin 2s}{\cosh 2s - \cos 2s},$$

$$Q = \frac{\sinh 2s - \sin 2s}{\cosh 2s - \cos 2s},$$

$$R = \frac{\cosh 2s + \cos 2s}{\cosh 2s - \cos 2s}.$$

Les trois fonctions P, Q, R tendent chacune vers l'unité dès que la variable s est supérieure à quelques unités (pratiquement à partir de $2s = 4$).

Les formules (34) et (35) permettent déjà d'observer que pour des valeurs de s supérieures à quelques unités, si μ est grand et $\tau = 1$ (remplissage complet), μ_a varie comme $\sqrt{\mu}$, *ce qui est bien conforme aux résultats conus concernant le cylindre plein* [1].

Si $\tau \neq 1$ pour les grandes valeurs de μ, la perméabilité μ_i tend vers zéro, mais μ_r tend vers $\frac{1 + 2\tau}{1 - \tau}$.

Ce résultat est tout à fait de l'ordre de grandeur des perméabilités apparentes observées dans la pratique. Ainsi pour $\tau = \frac{1}{2}$, on a $\mu_a = 4$ et pour $\tau = \frac{3}{4}$ on a $\mu_a = 10$. Ce sont là des valeurs courantes.

Sur les formules donnant μ_r et μ_i on peut également constater :

1° Que pour $\tau = 0$ ($\mu \neq 1$) quel que soit s : $\mu_r = 1$ et $\mu_i = 0$.

Il en est de même si $\mu = 1$ ($\tau \neq 1$).

2° Que pour $0 \leq \tau \leq 1$, lorsque s croît, μ_r tend vers 1 et μ_i tend vers zéro.

Nous mettons ainsi en évidence un résultat important.

Lorsque la fréquence augmente $\left(s = \sqrt{2\pi\mu\omega\gamma}\, a\right)$, la *perméabilité apparente tend vers l'unité.*

Dans les mêmes conditions, nous avons vu [1] que la perméabilité apparente tend vers zéro pour le tube ou le cylindre plein.

Les expressions (33) et (34) permettent d'évaluer les caractéristiques fondamentales d'une bobine dont le « noyau » est constitué par une poudre magnétique noyée dans un isolant.

Ce sont :

1° *Le facteur de réduction de flux* : $\eta = \frac{\mu_r}{\mu_{0_a}}$ qui est le rapport du flux inductif appliqué à un flux de même amplitude, mais de basse fréquence. C'est aussi le facteur de réduction de la perméabilité apparente.

On a

$$\eta = \frac{\mu_r}{\mu_{0_a}} = \frac{3 + (\mu - 1)(1 - \tau)}{3 + (\mu - 1)(1 + 2\tau)}$$
$$\times \left\{ \frac{\left\{\begin{array}{c}(\mu - 1)^2(1 - \tau)(1 + 2\tau)[1 + 2s^2R - 2sP] \\ + 4s^4 + 2s^3(\mu - 1)(2 + \tau)Q\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}(\mu - 1)^2(1 - \tau)^2[1 + 2s^2R - 2sP] \\ + 4s^4 + 4s^3(\mu - 1)(1 - \tau)Q\end{array}\right\}} \right\}. \qquad (36)$$

Les développements en série de P, Q, R (jusqu'à la puissance 4) montrent que pour les faibles valeurs de s, η est très voisin de l'unité.

Le facteur de réduction η ne commence à décroître que pour des valeurs de s beaucoup plus élevées que dans le cas du cylindre. D'ailleurs la limite de η pour les grandes valeurs de s dépend uniquement de μ et τ. Ainsi pour $\tau = \frac{1}{2}$, $\eta \to \frac{\mu + 5}{2\mu + 4}$ et vaut $\frac{1}{2}$ pour les grandes valeurs de μ ($\eta = 1$ si $\mu = 1$). Pour $\tau = 0$, $\eta \to 1$ et enfin pour τ très voisin de 1, $\eta \to \frac{1}{\mu}$ (zéro si μ est grand).

Ces résultats indiquent une différence profonde avec le cas du cylindre plein ou creux. Essentiellement elle est due à ce que la perméabilité μ intervient de façon différente (contrairement à ω et γ)

dans les équations des champs qui concernent le cylindre indéfini et la sphère.

2° *Le facteur de qualité*

$$Q_F = \frac{L\omega}{R_1} = -\frac{\mu_r}{\mu_i}.$$

$L\omega$ et R_1 sont l'inductance et la résistance de pertes par courants de Foucault [1]

$$Q_F = -\frac{\mu_r}{\mu_i} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (\mu-1)^2(1-\tau)(1+2\tau)[1+2s^2R-2sP] \\ \quad + 4s^4+2s^3(\mu-1)(2+\tau)Q \end{array} \right\}}{3\tau(\mu-1)s^2(sP-1)}. \quad (37)$$

L'étude de cette expression montre que Q_F, très grand pour de faibles valeurs de s, décroît lorsque s augmente, passe par un minimum aux environs de

$$s_m = \frac{\mu-1}{\sqrt{2}}[(1-\tau)(1+2\tau)]^{\frac{1}{2}} \quad (^2) \quad (38)$$

ou en posant $d = 2a$,

$$\mu\omega d^2 = \frac{(\mu-1)^2}{\pi\gamma}(1-\tau)(1+2\tau). \quad (39)$$

(²) La dérivée de Q_F a quatre racines positives ce qui, conduit à deux maxima et deux minima. Mais seul le premier minima est à considérer. Au delà du second Q_F croît comme s.

Le facteur de qualité reste donc important jusqu'à des fréquences d'autant plus élevées que le diamètre des particules est plus faible. Les grandeurs μ, ω, γ, τ étant fixées, il y aura donc intérêt à utiliser des particules de diamètre nettement inférieur à celui qui est donné par l'égalité (39).

En fait la fréquence correspondant au minimum se trouve en général au-dessus du domaine des fréquences d'utilisation.

Suivant les usages auxquels on destine les noyaux, le diamètre des « particules » ou « grains » varie aux environs de 2μ à 30μ. Ainsi la poudre de fer de 20μ est utilisée pour des noyaux toriques jusqu'à 100 kc. Celle de 3μ est utilisée en très haute fréquence jusqu'à 10 Mc (³). Mais la pratique montre bien que quelque soit la grosseur du grain, le facteur de qualité diminue rapidement au-dessus d'une certaine fréquence. Ceci est bien conforme à nos calculs et justifie nos approximations.

Tous les calculs de cet exposé sont en très bon accord avec l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus dans la technique des poudres.

(³) La valeur de Q_F ne concerne que les pertes par courants de Foucault. Le facteur de qualité total doit tenir compte en plus des pertes hystérétiques et des pertes résiduelles. Pour les ferrites, ce sont ces dernières les plus importantes. Mais il apparaît qu'on ne peut les réduire qu'aux dépens de la perméabilité [10].

Manuscrit reçu le 26 janvier 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Colombani A. — Étude sur les courants de Foucault. (*J. Phys.*, 1948, **1**, 273.)
[2] Thomson J. J. Recent Researches.
[3] Broglie L. de. — Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques (Gauthier-Villars).
[4] Jouguet M. — Courants de Foucault et fours à induction (Gauthier-Villars).
[5] Jahnke E. et Émde F. — Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.
[6] Slater J. C. et Frank N. — Electromagnetism (Mac Graw Hill Book).
[7] Watson G. N. — Bessel functions, (*Cambridge university Press*).
[8] Becker. — Théorie des électrons (Alcan).
[9] Congrès Solvay du Magnétisme 1932 (Gauthier-Villars).
[10] Snoek J. L. — Substances magnétiques non métalliques pour hautes fréquences. (*Revue technique Philips*, décembre 1946.)
[11] Shea H. C. — Magnetic Powders. (*Electronic industries*, août 1945.)
[12] Polydoroff W. J. — Permeability tuning, (*Electronics*, novembre 1945.)

PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES ET STRUCTURE DE LA PHASE QUADRATIQUE DU FERRITE DE CUIVRE

Par L. WEIL, F. BERTAUT et L. BOCHIROL.
Laboratoire d'Électrostatique et de Physique du Métal, Grenoble.

Sommaire. — On montre que le ferrite de cuivre prend par refroidissement lent, une structure quadratique à grand champ coercitif, à saturation magnétique plus faible et dont le rapport des axes $\frac{c}{a}$ atteint 1,06. A chaque température correspond un état d'équilibre caractérisé par une valeur différente de $\frac{c}{a}$, comprise entre 1 et 1,06.

L'étude aux rayons X, à l'aide du rayonnement Co $K\alpha$, montre que les variétés cubiques et quadratiques sont proches de l'état de ferrite inverse, mais que la fraction λ des ions Fe^{+++} croît sur les sites tétraédriques au fur et à mesure de la décroissance de la température. On propose une surstructure comportant une répartition ordonnée d'ions de Fe et Cu sur le sous-réseau des places octaédriques. Une telle surstructure, si elle existe, serait très difficile à mettre en évidence pour les autres ferrites, car les ions de Co, Ni, Mg, etc., déforment moins les réseaux que les ions de Cu^{++}. La variation de $\frac{c}{a}$ aurait alors deux causes, d'une part, l'établissement d'un ordre entre les ions Cu^{++} et Fe^{+++} dans le sous-réseau des sites octaédriques et, d'autre part, la variation de λ, c'est-à-dire les changements de concentration des ions du sous-réseau : on sait en effet que, pour toutes les surstructures, les paramètres varient en fonction du titre.

1. La structure des ferrites. — Dans les ferrites, de formule générale $Fe_2O_3\,MO$, où M est un métal bivalent, les ions d'oxygène, beaucoup plus gros que les autres, forment un empilement à peu près cubique compact; les ions métalliques viennent s'insérer dans les trous de cet empilement. Des considérations de valence conduiraient à penser que les ions bivalents devraient se placer sur les sites tétraédriques avec quatre atomes d'oxygène voisins alors que les ions ferriques iraient sur les sites octaédriques avec six atomes d'oxygène voisins. On obtiendrait alors un ferrite normal [1, 13]. Mais d'autres facteurs doivent intervenir puisque, à part le ferrite de *Zn*, les ferrites ont toujours une fraction λ des ions ferriques sur les sites tétraédriques A où ne reste donc qu'une fraction $1-2\lambda$ des places disponibles pour les ions Cu. Une fraction 2λ des ions Cu se trouve sur les places octaédriques B en même temps que la fraction $\mu = 1-2\lambda$ des ions Fe restants. On dit que le ferrite est inverse lorsque $\lambda = 0,5$.

Nous avons pensé que c'est à des variations de λ qu'il fallait attribuer les changements de propriétés magnétiques qu'on observe sur de nombreux ferrites en changeant les conditions de traitement thermique : le ferrite de cobalt par exemple présente une forte augmentation du champ coercitif lors d'un recuit prolongé un peu en dessous de 350° C. Le ferrite de cuivre a un champ coercitif beaucoup plus grand lorsqu'on le refroidit lentement que lorsqu'on le trempe depuis 1 000° C. En même temps sa structure se modifie profondément : il devient quadratique [2] au lieu de rester cubique comme à l'état trempé. De plus, examinés avec la raie Co $K\alpha$, les ions de fer et de cuivre ont un pouvoir diffusant relativement différent, ce qui permet de les localiser dans la structure. C'est pour ces raisons que nous avons consacré cette étude au ferrite de cuivre.

2. Préparation et caractères généraux des échantillons. — La préparation des ferrites a été faite soit suivant la méthode classique de mélange des oxydes suivi d'un traitement mécanique et thermique d'homogénéisation, soit par la méthode mise au point à notre laboratoire [3, 4], utilisant la décomposition, suivie d'oxydation, de sels organiques mixtes. On obtient la phase cubique par trempe à partir d'une température supérieure à 800° C; un refroidissement lent fait apparaître la phase quadratique. Nous avons vérifié aux rayons X la pureté des produits obtenus; il faut seulement éviter que, dans un séjour d'homogénéisation à 1 000° trop prolongé, ne se produise une ségrégation de CuO.

Indépendamment de sa structure aux rayons X, structure relativement longue à déterminer, la phase quadratique est caractérisée par ses propriétés magnétiques : le champ coercitif est plus grand [5] que dans la phase cubique. Pour deux des échantillons il a par exemple passé de 12 et 6,4 à 405 et 190 Oe

respectivement au cours d'un refroidissement lent. La perméabilité initiale, d'autre part, diminue de 45 à 1,3. Enfin la saturation magnétique, mesurée par M. Pauthenet, est très différente : égale à 42,9 et 54,1 C. G. S. à 294° K et 77° K respectivement pour la phase cubique, elle n'est que de 23,5 et 34,5 pour la phase quadratique; la loi d'approche est très différente; linéaire en $\frac{1}{H}$ pour l'échantillon cubique dès 1 000 Oe, elle donne encore une forte courbure à 5 000 Oe pour la phase quadratique et traduit l'existence d'une très grande dureté magnétique.

C'est la mesure du champ coercitif que nous avons utilisée pour étudier les conditions de formation de la phase quadratique. Nous avons opéré avec des vitesses de refroidissement variées et, des prélèvements trempés à partir de diverses températures nous ayant montré une variation continue du champ coercitif $\left(\text{et du rapport } \frac{c}{a} \text{ des axes de la phase quadratique}\right)$, nous avons été amenés à rechercher s'il existait un état d'équilibre fonction de la température.

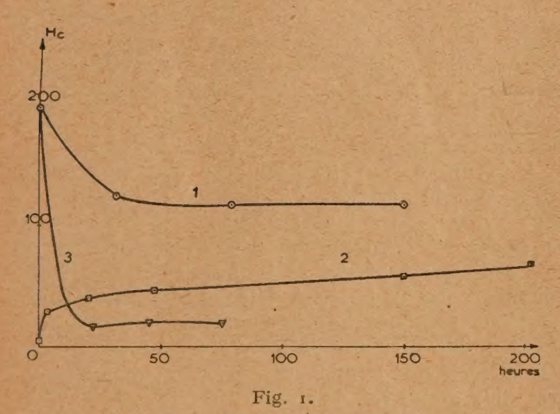


Fig. 1.
1. 400° C. Départ phase quadratique.
2. 400° C. » » cubique.
3. 700° C. » » quadratique.

Les courbes 1 et 3 de la figure 1 montrent par exemple, qu'à des températures supérieures à 300° C, on peut en des temps raisonnables, en partant d'un échantillon refroidi très lentement jusqu'à température ordinaire, obtenir un état d'équilibre. Il n'en serait pas de même en partant d'échantillons cubiques (courbe 2) : le refroidissement lent permet sans doute l'apparition de germes qui favorisent l'établissement de l'équilibre, alors que dans les échantillons trempés ces germes n'existent pas.

3. **La variation du champ coercitif.** — Nous avons reporté sur la figure 2, en fonction de la température à laquelle on a laissé l'équilibre s'établir, les valeurs du champ coercitif. Les points à température ordinaire donnent les valeurs atteintes lors du refroidissement lent. Les différences entre les valeurs observées pour une même température, dans les deux séries, sont dues à une différence de granulométrie : le frittage des bâtonnets à 1 000° C a réduit leur porosité et donc leur champ coercitif de Néel. Les irrégularités de la courbe 2 sont associées à une ségrégation de CuO, visible aux rayons X.

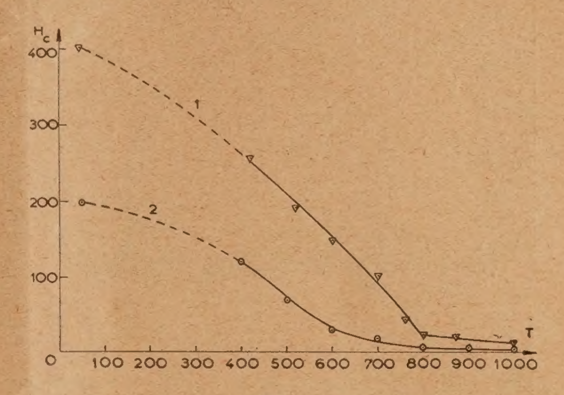


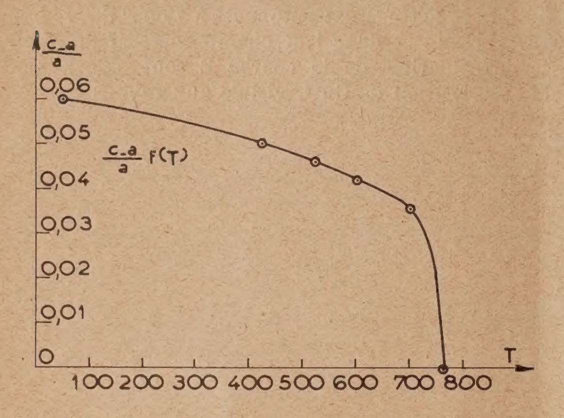
Fig. 2.
1. H_c $F(T)$ poudre.
2. H_c $F(T)$ bâtonnets.

4. **La variation du rapport $\frac{c}{a}$.** — La figure 3 (courbe 1) représente la variations du paramètre $\left(\frac{c}{a} - 1\right)$ en fonction de la température. Partant de 1 pour une température un peu supérieure à 760° C, $\frac{c}{a}$ atteint 1,06 à l'ambiante. On constate, d'une part, le fait très intéressant que $\frac{c}{a}$ est une fonction de la température, et, d'autre part, que tout se passe comme si à température ordinaire la valeur d'équilibre n'était pas encore atteinte. Les énergies d'activation correspondant aux migrations d'atomes sont trop grandes pour qu'on puisse observer une évolution vers un $\frac{c}{a}$ supérieur, à température plus basse.

La quantité $s = \frac{c}{a} - 1$ peut être considérée comme ayant un rapport certain avec l'état d'ordre associé à l'établissement de la structure quadratique. L'allure générale de la courbe représentant s en fonction de t est bien celle qu'on a l'habitude de rencontrer lors de l'établissement de surstructures dans les alliages, mais il ne semble pas qu'on ait signalé jusqu'ici pour ces derniers une variation concomitante aussi importante [6] de $\frac{c}{a}$.

Nous donnerons dans la suite une interprétation possible de ce phénomène.

La courbe 2 de la figure 3 donne les valeurs de *a*, en fonction de la température; la dilatation de la maille suivant *c* est donc accompagnée par une contraction suivant *a*.



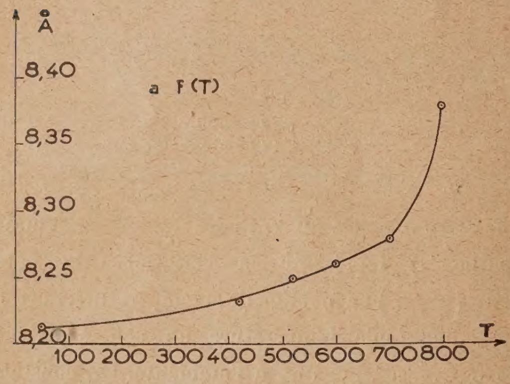


Fig. 3.

5. **La valeur de λ.** — Les intensités de réflexion dépendent de λ. L'influence de λ se fait évidemment d'autant plus sentir que les pouvoirs diffusants des ions Fe^{+++} et Cu^{++} sont plus différents. Avec le rayonnement de Co *K* α cette différence correspond à environ 5 électrons. Dans le calcul des intensités, le paramètre *u* qui fixe la position des atomes d'oxygène [11] a été supposé être égal à $\frac{3}{8}$. Naturellement un écart ε par rapport à cette valeur joue un rôle; nous avons choisi des plans pour lesquels l'influence de l'écart ε est du second ordre sur les intensités. Pour le dosage de λ nous avons comparé des raies dont les intensités varient l'une dans le même sens, l'autre en sens contraire de λ. Enfin, pour nous placer dans des conditions optimum de photométrie, nous avons comparé des raies d'intensité voisine.

On trouvera en annexe un tableau de classification des facteurs de structure.

En définitive, les couples de plans suivants ont été comparés : pour la phase cubique (400) et (220), (400) et (422); pour la phase quadratique (400)+(004) et (220) + (202) d'une part, et (004) et (422), d'autre part. Le tableau ci-dessous donne les valeurs moyennes obtenues.

Température d'équilibre (°C).	Structure.	λ.
960	Cubique	0,34
800	Cubique	0,33
700	Quadratique	0,35
420	»	0,39
20	»	0,43

Ces valeurs ont été obtenues en corrigeant les facteurs atomiques d'après Hönl [7]. La correction de Bradley et Hope [8] aurait donné des valeurs différentes. Nous avons donc vérifié notre méthode sur le ferrite de Zn qu'on est d'accord pour considérer comme normal. Nous avons obtenu $\lambda = 0{,}06$. En conclusion, si l'on ne peut accorder une confiance très grande aux valeurs mêmes données dans le tableau en raison de la mauvaise détermination actuelle des pouvoirs diffusants, du moins peut-on considérer que ce tableau donne un classement des valeurs de λ et affirmer qu'au fur et à mesure que la température s'abaisse le nombre d'atomes de Cu sur les sites A diminue, autrement dit que le ferrite de cuivre tend vers l'état de ferrite inverse.

L'évolution de λ que nous constatons concorde bien avec la variation du moment magnétique : à l'état inverse, les ions ferriques des sites A et B, à coefficient d'interaction négatif, donneraient un moment résultant nul et seul resterait le moment du cuivre qui est faible. A l'état normal, au contraire, les ions ferriques additionneraient leurs moments et le faible moment du cuivre s'en retrancherait. On conçoit que le moment soit plus petit quand λ est plus grand (*cf.* § 2).

6. **Conclusion.** — Il nous reste à comprendre quelle est la surstructure dont la formation donne lieu à la phase quadratique. Nous pensons que l'ordre s'établit sur le sous-réseau B entre les ions ferriques et cuivriques. La figure 4 montre en projection suivant l'axe *c*, dans l'hypothèse de $\lambda = 0{,}5$, la structure que nous proposons : sur le sous-réseau B, les plans de cuivre alternent avec des plans de fer; dans chacun des plans les atomes forment des files parallèles et, dans deux plans consécutifs, ces files sont perpendiculaires. On trouvera en annexe les données cristallographiques.

On peut se demander pourquoi pareille structure quadratique, qui est supposée exister à basse température pour Fe_3O_4 [13] n'apparaît pas pour d'autres ferrites ayant des caractéristiques magnétiques

comparables. Un raisonnement par analogie peut en fournir une explication. Dans des chlorures tels que $CoCl_2$, $MgCl_2$, etc., les cations sont entourés d'un octaèdre d'ions Cl, tous équidistants du cation central, alors que dans $CuCl_2$ [9], le rapport des distances des Cl, voisins proches est de 1,28. Il y a tout lieu de penser qu'une structure ordonnée peut également exister pour d'autres ferrites, mais que, les ions bivalents étant plus symétriques que ceux de Cu^{++}, elle n'est pas quadratique.



Fig. 4. — Projection de la maille suivant l'axe *c*.

Dans ce schéma, la variation de $\frac{c}{a}$ a deux causes : on observe une variation du rapport des axes en fonction de l'établissement de l'ordre et, simultanément en fonction d'une véritable variation de la concentration puisque les ions Cu viennent remplacer les ions Fe dans le sous-réseau B au fur et à mesure de l'abaissement de la température. Cette variation des paramètres en fonction de l'ordre et de la concentration est également classique dans les surstructures métalliques [10].

ANNEXE CRISTALLOGRAPHIQUE.

Classification des facteurs de structure. — Les facteurs atomiques sont notés par leur symbole chimique. Les facteurs de structure en module sont de la forme

$$|F| = A_{(hkl)} + \lambda\,\Delta B_{(hkl)},$$

où

$$\Delta = Cu^{++} - Fe^{+++}.$$

Dans le Tableau I les différentes catégories de $|F|$ sont abrégées par les lettres *a* à *f* de la première colonne. La deuxième colonne contient les valeurs de la somme $h^2 + k^2 + l^2$ caractérisant les raies dont les $|F|$ ont même expression. Les valeurs de $A_{(hkl)}$ et $B_{(hkl)}$ sont consignées dans la troisième et quatrième colonne respectivement.

TABLEAU I.

Catégorie.	$h^2+k^2+l^2$.	$A_{(hkl)}$.	$B_{(hkl)}$.
a....	$32n$	$4O + 2Fe + Cu$	0
b....	$16n + 11$	$Fe + \frac{Cu}{\sqrt{2}}$	$-(\sqrt{2} - 1)$
c....	$16(2n + 1)$	$4O + Fe - Cu$	4
d....	$32n + 12$	$-4O + 2Fe$	2
e....	$16n + 8$	Cu	-2
f....	$16n + 3$	$Fe - \frac{Cu}{\sqrt{2}}$	$(\sqrt{2} + 1)$

$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

Cette classification permet d'interpréter qualitativement les différences d'intensité entre raies Debye-Scherrer de Fe_2O_3, CuO cubique et de Fe_2O_3 ZnO (spinelle normal $\lambda = 0$).

Les raies *f*, éteintes dans Fe_2O_3 Zn O [$A_{(hkl)} = 0$] apparaissent nettement dans Fe_2O_3 CuO [$\lambda > 0$ et $B_{(hkl)} \neq 0$]; raies (111), (331), (531), (551), (711).

Les raies *e* sont plus fortes que leurs voisines de la catégorie *c* dans Fe_2O_3, ZnO; raies (220) > (400), (422) > (400), (620) > (444), (660) + (822) > (840). Dans Fe_2O_3 CuO par contre, les raies *e* sont affaiblies [$B_{(hkl)} < 0$] et les raies *c* renforcées [$B_{(hkl)} > 0$], de telle manière que les inégalités ci-dessus sont renversées.

Dosage de λ. — En posant $u = \frac{3}{8} + \varepsilon$ (*u* est le paramètre de position des atomes d'oxygène [11]), l'incertitude sur $A_{(hkl)}$ due à l'écart ε est, aux faibles indices, du premier ordre en ε pour les raies *b* et *f* et du deuxième ordre, donc négligeable pour les raies *c*, *d*, *e*, utilisées pour doser λ. Les intensités sont définies par

$$I_{(h,k,l)} = p\,|F|^2.$$

où *p* est la multiplicité du plan (*hkl*). L'intérêt de la méthode réside en ce que le rapport d'intensités de raies telles que *c* et *e* ou *d* et *e* varie largement avec λ. Dans l'exemple numérique suivant, il varie de 0,7 à 2,45 pour $0 < \lambda < 0,5$ [raies (400) et (422) de Fe_2O_3 CuO cubique] :

$$\frac{I_{(400)}}{I_{(422)}} = \frac{6(27,1 + 19,4\lambda)^2}{24(16,2 - 8,8\lambda)^2}.$$

Les intensités observées sont corrigées de la manière usuelle des facteurs de Lorentz, de polarisation et d'absorption (Claassen).

Le ferrite de cuivre quadratique. — Le Tableau II résume les valeurs de $\sin^2 \Theta$ observées et calculées ($K\alpha$ de cobalt) et la catégorie des raies de Fe_2O_3, CuO quadratique, décrit ici pour des raisons de commodité comme un spinelle pseudo-cubique. Les atomes d'oxygène dépendent alors de deux paramètres u et v, voisins de $\frac{3}{8}$.

TABLEAU II.

Ferrite de cuivre quadratique.

$a = 8{,}216$ Å ; $\frac{c}{a} = 1{,}060$.

Indice (*hkl*).	$\sin^2 \Theta$ (obs.).	$\sin^2 \Theta$ (calc.).	Intensité.	Facteur de structure.
(111).......	0,0321	0,0341	m	f
(202).......	0,0879	0,0894	m	e
(220).......	0,0939	0,0946	f	e
(113).......	0,1171	0,1183	F	b
(311).......	0,1276	0,1287	FF	b
(222).......	0,1353	0,1367	f+	d
(004).......	0,1670	0,1683	m	c
(400).......	0,1880	0,1891	m+	c
(313).......	0,2120	0,2129	ff	f
(331).......	0,2225	0,2233	fff	f
(224).......	0,2626	0,2629	f	e
(422).......	0,2774	0,2785	m	e
(115).......	0,2877	0,2867	m+	b
(333).......	0,3087	0,3075	m	b
(511).......	0,3183	0,3179	F	b
(404).......	0,3580	0,3575	FF	a
(440).......	0,3791	0,3783	F	a
(531).......	0,4130	0,4124	ff	f
(206).......	0,4265	0,4261	ff	e
(620).......	0,4719	0,4728	ff	e
(335).......	0,4742	0,4758	f+	b
(533).......	0,4976	0,4966	m+	b
(622).......	0,5159	0,5149	m	d
(444).......	0,5481	0,5466	m+	c
(515).......	0,5711	0,5704	f	f
(551, 711)...	0,6020	0,6016	f	f
(426).......	0,6148	0,6152	f	e
(317).......	0,6336	0,6338	m	b
(642).......	0,6570	0,6568	f	e
(535).......	0,6660	0,6649	m	b
(008).......	0,6740	0,6734	f	a
(553, 713)...	0,6863	0,6857	m+	b
(731).......	0,6964	0,6961	f	b
(800).......	0,7570	0,7565	m+	a
(157).......	0,8230	0,8229	m	b
(660).......	0,8510	0,8511	ff	e
(555, 715)...	0,8541	0,8541	F	b
(408).......	0,8627	0,8625	m	c
(751).......	0,8849	0,8852	m	c
(804).......	0,9245	0,9249	m	c
(840).......	0,9455	0,9456	m	c

Notations des intensités : f = faible, ff = très faible, m = moyen, F = fort, FF = très fort.

La structure ordonnée, proposée ici (*fig.* 4), dérive du groupe d'espace $D_{4h}^{19} - I\frac{4}{amd}$ [12] $\left(\text{ou } F\frac{4}{ddm}\right)$ par le dédoublement du complexe de réseau en 8 *d*. Le vrai groupe d'espace serait C_{2v}^{20} — *I mm*. La plus petite maille est celle formée par *c* et les moitiés des diagonales de la figure 4 $a' = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Les raies de surstructure auxquelles le dédoublement des sites B donnerait lieu n'ont pas encore été observées, soit à cause de leur très faible intensité, soit parce que l'ordre à grande distance n'est pas établi.

L'existence de plusieurs états ordonnés au-dessous de $\lambda = 0{,}5$ ne peut être exclue *a priori*.

Manuscrit reçu le 3 janvier 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] NÉEL L. — *Ann. de Physique*, 1948, **3**, 137.
[2] SNOEK J. L. — *Rev. Tech. Philips*, 1946, **8**, 359.
[3] NÉEL L., WEIL L. et AUBRY J. — Brevet français, 21 août 1943.
[4] WEIL L. et SUCHET J. — *Comm. Soc. Fr. de Phys.*, octobre 1949.
[5] FORRER R, BAFFIE R. et FOURNIER P. — *J. Phys. Rad.*, 1945, **6**, 80.
[6] BETTERIDGE W. — *J. Inst. of metals*, 1949, **12**, 559.
[7] HÖNL H. — *Z. f. Physik*, 1933, **84**, 1.
[8] BRADLEY A. J. et HOPE W. — *Proc. Roy. Soc.* (A) London, 1932, **136**, 272.
[9] WELLS A. F. — *Acta cristall.*, 1949, **2**, 175.
[10] NIX F. C. et SCHOCKLEY W. — *Rev. of Mod. Phys.*, 1938, **10**, 1.
[11] *Strukturberichte*, 1913-1928, **1**, 350.
[12] *Tables internationales pour la détermination des structures*, Berlin, Borntraeger, 1935, **1**, 228.
[13] VERWEY E. J. et HEILMANN E. L. — *J. Chem. Phys.*, 1947, **15**, 174.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES CHAMPS NON LOCALISABLES

Par Bernard KWAL.
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — Les champs non localisables Ω dépendent à la fois des opérateurs quantiques x_μ et p^μ. Les équations relativistes des champs scalaires, bâties par Yukawa conformément au principe de réciprocité de Born, introduisent une nouvelle constante fondamentale λ, jouant le rôle d'un rayon fini des corpuscules élémentaires. En posant $m = 0$, mais en laissant $\lambda \neq 0$, on obtient une Mécanique ondulatoire réciproque de celle ordinaire des corpuscules ponctuels; le corpuscule réciproque étant caractérisé par une masse nulle et par une extension spatio-temporelle finie. Les équations de Yukawa admettent comme solutions des produits de certaines solutions de la Mécanique ondulatoire ordinaire et de celles de la Mécanique ondulatoire réciproque.

A l'approximation de l'Optique géométrique, les équations de Yukawa conduisent à une sorte de Mécanique classique, caractérisée par une fonction de Jacobi, qui dépend de deux groupes de variables X_μ et r_0 par l'intermédiaire de l'expression $S_\mu(X_\mu) f(r_\mu)$, où $f(r_\mu)$ est, dans le référentiel propre une fonction arbitraire des points de la surface d'une sphère de rayon λ, tandis que $S_0(X)$ est une fonction de Jacobi ordinaire.

Dans l'espace de la nouvelle variable r_μ, $S(X_\mu, r_\mu)$ est donc partout nulle sauf à la surface d'une sphère de rayon λ.

En ce qui concerne la théorie des champs spinoriels, il semble possible *a priori* de linéariser les équations scalaires et d'introduire le spin indépendamment dans les deux espaces, celui de configuration et celui des moments. Les équations du type Dirac, valables à la fois dans les deux espaces, sont possibles et compatibles entre elles, lorsque x^μ est un quadrivecteur du genre « temps », les solutions correspondantes n'étant nulles qu'à l'extrémité d'un intervalle de temps propre égal à $\frac{\lambda}{c}$. Pour obtenir les équations relatives à un quadrivecteur x^μ du genre « espace », on fait appel à une règle, énoncée par l'auteur en 1936 et qui permet de déduire les équations d'onde, relatives à une grandeur tensorielle attachée à un corpuscule élémentaire, de la transformation de Lorentz, écrite dans la représentation cayléenne, dans le passage au référentiel propre du corpuscule en question. Un quadrivecteur de genre « espace », se réduisant dans ce dernier référentiel au vecteur spatial de composantes r_1, r_2, r_3, avec $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \lambda^2$, on trouve que les équations d'onde correspondantes s'écrivent

$$(\Gamma^\mu x_\mu - r_k \Gamma'^k) S = 0,$$

Γ_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) et Γ'_k (1, 2, 3) étant deux systèmes commutant des matrices de rang 8, satisfaisont chacun aux mêmes relations qui régissent le système des matrices de Dirac, et $S = (S_1, S_2, S_3, S_4; S_1^*, S_2^*, S_3^* S_4^*)$. Grâce à cette représentation, il est possible de développer une théorie des champs spinoriels non localisables $S(X^\mu, p^\mu)$ qui dépendent d'un quadrivecteur du genre « espace » x^μ et d'un quadrivecteur du genre « temps » p^μ.

1. Introduction. — En Mécanique quantique les coordonnées de l'espace-temps x_ν et celles de l'extension en moments ne sont pas mesurables simultanément avec une précision infinie, car elles sont représentées par des opérateurs non commutables satisfaisant aux relations de non-commutation

$$x^\nu p_\mu - p_\mu x^\nu = [X^\nu, p_\mu] = i\hbar\delta^\nu_\mu. \qquad (1.1)$$

Toute grandeur physique, fonction des x^ν seuls, est localisable dans l'espace-temps, car l'on peut faire une mesure simultanée portant sur cette grandeur, et sur l'endroit où s'effectue l'observation, mesure qui n'est affectée d'aucune limitation théorique quant à sa précision.

Il n'en est plus de même lorsqu'une grandeur physique est fonction à la fois des x^ν et des p_μ, car elle se présente alors comme un opérateur qui ne commute plus avec x^ν (ni avec p_μ) et sa mesure ne peut plus se faire avec une précision infinie en même temps que celle de la coordonnée x^ν, qui la « localise » dans l'espace-temps.

L'objet de la théorie des champs non localisables est d'étudier les champs d'onde plus généraux que ceux dont s'occupe la Mécanique ondulatoire ordinaire, en les considérant précisément comme des grandeurs qui dépendent à la fois des x^ν et des p^ν. Ces fonctions d'onde de l'extension en phase doivent obéir à certaines équations dans l'espace-temps qui se réduisent aux équations d'onde ordinaires de la Mécanique ondulatoire, lorsqu'on les suppose ne pas dépendre des p^ν. Elles doivent, d'autre part, obéir à certaines autres équations dans l'extension en moments, et la manière la plus simple d'établir ces équations consiste à transposer les équations de l'espace-temps, en prenant comme guide la symétrie entre les x^ν et les p_μ que révèlent les équations de la Mécanique analytique classique et qui se retrouve dans la théorie des transformations de la Mécanique quantique. C'est à cette propriété de symétrie que Born [1] donne le nom du principe de réciprocité, et c'est à ce principe que fait appel Yukawa [2] pour bâtir les équations de la théorie des champs non localisables.

2. **Le principe de réciprocité de Born.** — M. Born part de la constatation que les équations de la Mécanique classique sous la forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x^\nu} \tag{2.1}$$

sont invariantes par rapport aux transformations du groupe de Lorentz mais également par rapport aux transformations plus générales de contact, et, elles restent inchangées lorsqu'on effectue la substitution

$$x_\nu \rightarrow p_\nu, \qquad p_\nu \rightarrow -x_\nu. \tag{2.2}$$

Cette sorte de symétrie apparaît également en Mécanique ondulatoire, où le mouvement d'une particule libre est représenté par une expression $\exp\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)p_\nu x^\nu\right]$, symétrique en x_ν et p_ν. La même symétrie apparaît dans les lois fondamentales de la Mécanique quantique, dans les lois de commutation (1.1), dans l'expression de l'opérateur-tenseur du moment de rotation

$$m_{\nu\mu} = x_\nu p_\mu - p_\mu x_\nu, \tag{2.3}$$

ainsi que dans la théorie générale des transformations dont le cas particulier est représenté par la transformation de Fourier, permettant de passer de l'espace des x_ν à l'espace des p_μ.

$$\Phi(p) = \int \Psi(X)\, e^{\frac{i}{\hbar} p_\nu x^\nu}\, \mathrm{d}X. \tag{2.4}$$

Ce sont ces considérations de symétrie qui ont suggéré à Born le *principe de réciprocité*, selon lequel les lois de la nature seraient symétriques par rapport aux espaces de configuration et des moments, ou, plus précisément qu'elles seraient invariantes par rapport à la substitution

$$x_\nu \rightarrow p_\nu, \qquad p_\nu \rightarrow -x_\nu.$$

Remarquons tout de suite que le principe, ainsi formulé, est très général et peut se prêter à des applications aussi variées que différentes. Il suffit, pour s'en rendre compte, d'examiner l'évolution des différentes tentatives théoriques, qui ont été faites par Born lui-même, depuis sa théorie de l'univers clos dans l'espace des p qui serait « réciproque » à l'échelle microscopique de l'univers sphérique d'Einstein dans l'espace des x à l'échelle cosmique, jusqu'à sa théorie récente des masses des corpuscules élémentaires. Une autre idée de Born est que la constante de Planck h doit être considérée comme le produit d'une longueur minimum a par la grandeur réciproque, le moment maximum b (selon Born, la grandeur a serait voisine du rayon classique de l'électron).

3. **Équations des champs non localisables de Yukawa (Champs scalaires).** — Les champs localisables ordinaires $\Psi(x)$ doivent être considérés comme cas particuliers des champs non localisables $\Omega(x, p)$, et sont représentés par des matrices diagonales dans la représentation où les x le sont. Dans ce cas, ils doivent satisfaire à l'équation d'ondes de Gordon-Klein.

$$(\partial_\mu \partial^\mu - x^2)\Psi(x) = 0, \qquad x = \frac{mc}{\hbar}, \tag{3.1}$$

qui peut être écrite encore sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} &[p_\mu, [p^\mu, \Psi]] + m^2c^2\Psi = 0, \\ &[A, B] = AB - BA. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Yukawa admet que le champ scalaire non localisable satisfait une relation de commutation de la forme précédente et comme on a besoin en outre d'une relation de commutation entre $\Omega(x, p)$ et les x, il se guide par le principe de réciprocité et aboutit ainsi au système d'équations suivant :

$$\left.\begin{aligned} &[p_\mu, [p^\mu, \Omega]] + m^2c^2\Omega = 0, \\ &[x_\mu, [x^\mu, \Omega]] - \lambda^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Remarquons tout de suite que si l'on devait appliquer strictement le principe de réciprocité, on eût posé $\lambda = \frac{h}{mc}$, mais ce n'est pas le cas ici, car λ doit figurer, comme nous allons le voir tout à l'heure, le rayon du corpuscule et ne peut pas être identifié avec la longueur d'onde de Broglie $\frac{h}{mc}$.

On voit immédiatement que, lorsque Ω ne dépend pas des p et commute donc avec les x, on doit avoir $\lambda = 0$, de sorte que l'intervention de cette longueur attachée au corpuscule élémentaire est intimement liée au caractère non localisable du champ Ω.

Dans la représentation où les opérateurs x_μ sont des matrices diagonales, chaque élément de la matrice $(x''_\mu | \Omega | x'_\mu)$ peut être représenté par une fonction de deux variables $X_\mu = \frac{1}{2}(x''_\mu + x'_\mu)$ et $r_\mu = (x''_\mu - x'_\mu)$, et, dans ce cas, le système prend la forme que voici

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial X_\mu \partial X^\mu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Omega(X_\mu, r^\mu) = 0, \\ &(r_\mu r^\mu - \lambda^2)\,\Omega(X_\mu, r^\mu) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

système qui admet les solutions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\Omega(X_\mu, r^\mu) = \omega(X_\mu, K_\mu)\,\delta(r_\mu r^\mu - \lambda^2), \\ &K_\mu K^\mu + m^2c^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

où δ est la fonction singulière de Dirac. On voit donc que les fonctions d'onde Ω dépendent de deux variables, l'une X_μ décrivant pour ainsi dire le mouvement d'ensemble (du centre de gravité du corpuscule), tandis que l'autre r_μ correspond à un degré de liberté supplémentaire, interne, de la particule.

Mais le problème qui nous intéresse est de pouvoir

identifier la longueur λ avec le rayon propre de la particule, il faut donc que dans le référentiel propre, caractérisé par $K_1 = K_2 = K_3 = 0$, $K_4 = imc$, les solutions soient nulles partout sauf sur la sphère de rayon λ. Pour qu'il en soit ainsi, force nous est d'ajouter aux équations (3.3) l'équation supplémentaire

$$\left[x_\mu, [p^\mu, \Omega]\right] = \left[p^\mu, [x_\mu, \Omega]\right] = 0 \qquad (3.6)$$

qui, dans la représentation précédemment employée, s'écrit

$$r_\mu \frac{\partial \Omega(X_\mu, r^\mu)}{\partial X_\mu} = 0, \qquad (3.7)$$

et conduit aux solutions du système total qui ont la forme que voici :

$$\Omega(X_\mu, r^\mu) = \omega(X_\mu, K_\mu)\,\delta(r_\mu r^\mu - \lambda^2)\,\delta(r_\mu K^\mu), \qquad (3.8)$$

dont le dernier facteur $\delta(r_\mu K_\mu)$ contribue, dans le référentiel propre de la particule ($K_1 = K_2 = K_3 = 0$, $K_4 = imc$) à annuler r_4, de sorte qu'il ne reste que les composantes r_1, r_2 et r_3, avec $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \lambda^2$. Ainsi, est-on arrivé à bâtir un système d'équations dont les solutions jouissent des propriétés que nous leur avons voulu faire attribuer.

4. **Mécanique ondulatoire réciproque** [3]. — La Mécanique ondulatoire ordinaire d'une particule ponctuelle est contenue comme cas limite dans le schéma précédent. Les solutions $\xi(x)$ de la Mécanique ondulatoire ordinaire satisfont en effet aux équations du schéma précédent où l'on a posé $\lambda = 0$. Il existe un autre cas limite en considérant des solutions $\Pi(p)$, qui correspondent à $m_0 c = 0$ et $\lambda \neq 0$. Ces champs, qui ne dépendent pas des coordonnées de l'espace de configuration, mais uniquement de celui des moments, décrivent une particule *réciproque* (de celle qu'envisage la Mécanique ondulatoire ponctuelle), caractérisée par l'absence d'une masse propre et par une extension spatio-temporelle finie λ. L'interaction des particules réciproques ne peut se faire que par l'intermédiaire des fonctions d'interaction U qui ne dépendent que des moments p_ν et, dans l'espace des p l'équation d'ondes s'écrit

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial p_\nu p^\nu} + \frac{1}{\hbar^2}[U(p) + \lambda^2]\right\}\Omega(p) = 0.$$

Le mouvement de la particule réciproque libre sera donc représenté par des ondes du type $\exp\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)p_\nu r^\nu\right]$ avec $r_\nu r^\nu - \lambda^2 = 0$, se propageant dans l'extension en moments. Et de même qu'en Mécanique Ondulatoire de M. Louis de Broglie, au moment P_ν est associé l'inverse d'une longueur d'onde, caractérisant un champ périodique dans l'espace de configuration, on a ici, par réciprocité, associé au vecteur r_ν représentant le « rayon fini » de la particule, l'inverse d'un moment p_ν, cet inverse $l_\nu = \frac{1}{p_\nu} = \frac{1}{\hbar} r_\nu$ jouant le rôle du vecteur onde dans l'extension en moment de la même manière que $K_\nu = \frac{1}{\Lambda_\nu} = \frac{1}{\hbar} P_\nu$ le joue dans l'espace de configuration.

En particulier, si nous enfermons la particule réciproque dans une « boîte » dans l'espace de p, c'est-à-dire si la valeur absolue de son moment ne peut varier qu'entre deux limites dont la différence est égale à P, on obtient une quantification du vecteur interne r_ν de la particule, grâce à la condition cyclique

$$r_\nu = n_\nu \left(\frac{h}{P}\right).$$

n_ν étant des entiers, satisfaisant la relation

$$n_\nu n^\nu = \lambda^2 \left(\frac{P}{h}\right).$$

Soient alors $\xi(x)$ et $\pi(p)$ des solutions de la Mécanique ondulatoire ordinaire et de la Mécanique ondulatoire réciproque, alors les fonctions

$$\Omega_1(x, p) = \xi(x)\,\pi(p) \quad \text{et} \quad \Omega_2(x, p) = \pi(p)\,\xi(x)$$

satisfont aux équations (1), à condition que l'on ait

$$\xi'_\nu(x)\,\pi'^\nu(p) = 0 \quad \text{ou} \quad \pi'^\nu(p)\,\xi'_\nu(x) = 0,$$

où ξ'_ν est le résultat de l'opération p_ν effectuée sur $\xi(x)$, et $\pi'^\nu(p)$, le résultat de l'opération X^ν effectuée sur $\pi(p)$

$$\xi'_\nu(x) = [p_\nu \xi(x)], \qquad \pi'^\nu(p) = [x^\nu \pi(p)].$$

5. **Approximation de l'optique géométrique des équations de Yukawa.** — On sait que les équations de la Mécanique ondulatoire ordinaire, en approximation d'ordre zéro, lorsque le quantum d'action h est petit devant les grandeurs d'action mises en jeu, fournissent des équations de la Mécanique analytique classique sous la forme de Jacobi-Hamilton. Nous allons étudier les équations qui résultent d'une approximation analogue dans le cas de la théorie de Yukawa.

A cette fin, nous allons nous servir de la représentation (X_μ, r_μ) dans laquelle on a

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial X_\mu \partial X^\mu} - \frac{m^2 c^2}{h^2}\right)\Omega(X_\mu, r_\mu) = 0, \\ &(r_\mu r^\mu - \lambda^2)\,\Omega = 0, \qquad r_\mu \frac{\partial \Omega}{\partial X^\mu} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

En posant alors

$$\Omega(X_\mu, r_\nu) \sim \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(X_\nu, r_\nu) + S_1(X_\nu, r_\nu)\right], \qquad (5.2)$$

on est conduit, en approximation d'ordre zéro par rapport à h, aux équations que voici :

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\left[\frac{\partial S(X_\nu, r_\nu)}{\partial X_\nu}\right]^2 + m^2 c^2\right\} = 0, \\ &r_\nu r^\nu - \lambda^2 = 0, \qquad r_\nu \frac{\partial S(X_\nu, r_\nu)}{\partial X_\nu} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

donc la fonction S dépend de deux variables X_ν et r_ν et peut être mise sous la forme $S_0(X_\nu)\, f(r_\nu)$. La fonction $f(r_\nu)$ n'est définie, dans le référentiel propre du corpuscule (dans l'espace X_ν) que sur une sphère de rayon λ et, peut donc être représentée par un développement en série des fonctions sphériques. En considérant que $f(r_\nu)$ est normalisée sur la surface de la sphère et en intégrant sur cette surface la première des équations (5.3), on trouve que $S_0(X_\nu)$ peut être identifiée avec la fonction de Jacobi-Hamilton de la Mécanique classique.

6. **Les champs non localisables du corpuscule à spin $\frac{1}{2}$ [4].** — Nous généralisons avec Yukawa des équations de Dirac de la manière que voici :

$$[p_\mu, \gamma^\mu \Omega] + imc\Omega = 0, \qquad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

d'où, par itération, on obtient bien

$$\big[p^\mu, [p_\mu, \Omega]\big] - m^2c^2\Omega = 0. \quad (6.2)$$

Dans la représentation où les x^μ sont diagonaux, on peut considérer l'équation entre opérateurs x^μ, p_μ et $\Omega(x_\mu, p^\mu)$ comme agissant sur une certaine fonction $f(x_\mu)$. Lorsque l'opérateur $\Omega(x^\mu, p_\mu)$ ne dépend pas de p_μ et se réduit à $\Psi(x^\mu)$, on a

$$\gamma^\mu p_\mu(\Psi f) - \gamma^\mu \Psi p_\mu(f) = \gamma^\mu(p_\mu \Psi) f.$$

et l'équation (6.1) devient

$$f(x)(p_\mu \gamma^\mu \Psi + imc\Psi) = 0,$$

d'où résulte l'équation de Dirac ordinaire, relative à la fonction d'onde $\Psi(x^\mu)$.

Il est plus délicat d'établir d'une manière correcte les équations réciproques. Tout d'abord, est-ce que la réciprocité doit nécessairement s'appliquer aux spins ? Nous avons vu que dans la représentation où les x^μ sont diagonaux, tout se passe comme si le champ dépendait de deux variables, l'une x^μ décrivant le mouvement d'ensemble de la particule, et l'autre r^μ représentant des degrés de liberté supplémentaires, internes de la particule. On peut donc très bien concevoir *a priori* que la particule possède un spin dans l'espace de X^μ mais non dans celui des r^μ. Nous avons d'ailleurs constaté que la théorie du champ scalaire, admet des solutions de la forme $\Omega(x, p) = \zeta(x)\,\pi(p)$, où $\zeta(x)$ et $\pi(p)$ sont certaines solutions de la Mécanique ondulatoire ordinaire et de la Mécanique ondulatoire réciproque, de sorte qu'on doit pouvoir effectuer la linéarisation de l'équation d'onde, introduction du spin, indépendamment dans l'espace de x et dans celui des p. Et, en effet, on vérifie immédiatement que, par exemple, les équations suivantes sont parfaitement compatibles entre elles

$$\left.\begin{aligned} [p_\mu, \gamma^\mu\Omega] + imc\Omega &= 0, \\ \big[x^\mu, [x_\mu, \Omega]\big] - \lambda^2\Omega &= 0, \\ \big[x^\mu[p_\mu, \Omega]\big] \equiv \big[p_\mu, [x^\mu, \Omega]\big] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (6.3)$$

Considérons maintenant les équations linéarisées en x^μ. Lorsque celui-ci est un quadrivecteur du genre « temps » comme l'est p_μ, il n'y a aucune difficulté pour écrire les équations d'onde correspondantes et nous pouvons poser

$$[x^\nu, \gamma_\nu\Omega] + i\lambda\Omega = 0, \quad (6.4)$$

Montrons, qu'en effet, on peut les rendre compatibles avec les équations (6.1). A cette fin appliquons à l'équation (6.1) l'opération $[x^\nu, \gamma_\nu, \ldots]$ et à l'équation (6.4), l'opération $[p_\mu, \gamma^\mu, \ldots]$, il vient

$$\gamma_\nu\gamma^\mu\big[x^\nu, [p_\mu, \Omega]\big] = -mc\lambda\Omega = \gamma^\mu\gamma_\nu\big[p_\mu, [x^\nu, \Omega]\big].$$

Mais puisque

$$\big[x^\nu, [p_\mu, \Omega]\big] \equiv \big[p_\mu, [x^\nu, \Omega]\big] \quad (^1),$$

on doit donc avoir

$$(\gamma_\nu\gamma^\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu)\big[p_\mu, [x^\nu, \Omega]\big] = 0,$$

d'où, on tire, en vertu des propriétés des matrices γ, la condition de compatibilité suivante :

$$\begin{aligned} &\big[p_\mu, [x^\nu, \Omega]\big] - \big[p^\nu, [x_\mu, \Omega]\big] \\ &\quad \equiv \big[x_\nu, [p^\mu, \Omega]\big] - \big[x^\mu, [p_\nu, \Omega]\big] = 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

qui, dans la représentation (X, r), prend la forme que voici

$$r_\mu \frac{\partial U(X, r)}{\partial X^\nu} - r_\nu \frac{\partial U(X, r)}{\partial X^\mu} = 0. \quad (6.6)$$

Considérons alors le référentiel propre du corpuscule, dans lequel son mouvement d'ensemble est représenté par une onde de vecteur-onde

$$K_1 = K_2 = K_3 = 0, \qquad K_4 = im_0c.$$

Les équations montrent alors que l'on a $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ et $r_4 \neq 0$, de sorte que la solution des équations s'écrive sous la forme

$$u(0, 0, 0, im_0c;\, 0, 0, 0, r_4)\,\delta(-r_4^2 + \lambda^2)\, e^{imcX^4}, \quad (6.7)$$

et ne diffère de zéro qu'à l'extrémité d'un intervalle de temps propre égal à $\pm\frac{\lambda}{c}$.

On peut se demander si de telles solutions ne puissent convenir à des corpuscules essentiellement éphémères, pour lesquels la donnée de la durée de vie jouerait un rôle aussi fondamental que celle d'un rayon fini dans le cas des corpuscules essentiellement stables.

Il reste donc à trouver de quelle manière doit-on écrire les équations d'onde relatives à l'opérateur x^μ, lorsque celui-ci est un quadrivecteur du genre-

(1) Il suffit d'envisager l'identité

$$\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C, [A, B]\big] \equiv 0$$

et la relation

$$[x^\nu, p_\mu] = i\hbar\delta^\nu_\mu.$$

espace. Pour résoudre ce problème, nous allons faire appel à une règle, que nous avons établie en 1936 [5] à l'occasion de l'équation de Dirac, et, qui permet de trouver, d'une manière seule correcte croyons-nous, les équations d'onde relatives à une grandeur tensorielle quelconque, attachée à un corpuscule élémentaire.

7. Règle fondamentale de formation d'équations d'ondes relatives à une grandeur tensorielle, attachée à un corpuscule élémentaire. — Nous allons formuler cette règle de la manière que voici :

Les équations d'ondes relatives à une grandeur tensorielle, attachée à un corpuscule élémentaire, se déduisent de la représentation cayléenne de la transformation de Lorentz que subit le tenseur en question lors du passage du référentiel de l'observateur au référentiel propre du corpuscule, en remplaçant dans la formule ainsi obtenue les composantes du tenseur dans le premier référentiel par les opérateurs quantiques qui leur correspondent.

Ainsi, en considérant le quadrivecteur quantité de mouvement énergie $P\left(P_1, P_2, P_3, P_4 = \frac{iW}{c}\right)$, la formule de Cayley s'écrit-elle sous forme du produit quaternionien suivant

$$PS = S^* P', \qquad (7.1)$$

S étant le quaternion de transformation. Dans le référentiel propre $P' = (0, 0, 0, im_0c)$, et la formule (7.1) se simplifie

$$PS = im_0 c S^*, \qquad (7.2)$$

cette équation jointe à sa conjuguée $P^* S^* = -im_0c\, S$ est équivalente à l'équation de Dirac et à se conjuguée

$$\gamma^\nu P_\nu \Psi = im_0 c \Psi, \qquad \gamma^{\nu *} P_\nu^* \Psi^* = -im_0 c \Psi^*, \quad (7.3)$$

comme on le constate en posant

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= \quad S_1 + S_1^* + i(S_2 + S_2^*), \\ \Psi_2 &= -(S_3 - S_3^*) - i(S_0 + S_0^*), \\ \Psi_3 &= -\; S_1 + S_1^* + i(-S_2 + S_2^*), \\ \Psi_4 &= \quad S_3 - S_3^* + i(S_0 - S_0^*). \end{aligned}\right\} \quad (7.4)$$

En appliquant notre règle à un vecteur du genre espace x^μ, qui dans le référentiel propre du corpuscule est représenté par un vecteur spatial de composantes r_1, r_2, r_3 avec $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \lambda^2$, la formule de Cayley nous conduit à la relation que voici

$$XS = S^* R, \qquad R = (r_1, r_2, r_3, 0). \qquad (7.5)$$

Mais cette fois-ci, il n'est plus possible comme dans le cas de l'équation de Dirac, de trouver une représentation complexe à quatre lignes et à quatre colonnes, qui permet la séparation des équations complexes conjuguées. Force nous est donc de recourir à une représentation à huit lignes et à huit colonnes, englobant les fonctions complexes conjuguées, ou, ce qui revient au même, envisager une représentation réelle de rang 8.

Nous allons montrer comment on peut trouver rapidement une représentation de rang 8 de la formule de Cayley, en se basant sur nos anciennes recherches sur la représentation des quaternions au moyen des matrices de rang 4. Nous avons montré [6] qu'il en existe deux, qui commutent entre elles, chacune introduisant deux unités quaternioniennes indépendantes, de sorte que leurs produits de deux à deux définissent un système hypercomplexe à quatre unités de base (comme l'est le système des matrices de Dirac). Avec nos notations antérieures la formule de Cayley s'écrit

$$(P_4.1 + e'_k P^k) S = (P'_4.1 - e_k P'^k) S^*, \qquad (7.6)$$

$e'k$ et ek étant les deux systèmes d'unités quaternioniennes indépendantes et telles que

$$\left.\begin{aligned} &e'^2_k = e^2_k = -1, \qquad e'_1 e'_2 = e'_3, \quad \ldots \\ &e_1 e_2 = e_3, \quad \ldots, \qquad e_k e'_j = + e'_j e_k \\ &(j, k = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \quad (7.7)$$

Le système de 16 matrices $t_{\nu\mu} = e_\nu e_\mu\, (\nu, \mu = 1, 2, 3, 4)$ permet la construction des formes bilinéaires, qui définissent différentes grandeurs tensorielles, selon le caractère relativiste des fonctions qui servent à les former. Ainsi, en partant des composantes d'un vecteur ou d'un tenseur antisymétrique gauche forme-t-on des tenseurs du second rang, le dernier étant celui, bien connu de Maxwell.

Dans le cas des demi-vecteurs S, la théorie conduit à envisager deux êtres géométriques, selon que l'on forme des formes bilinéaires selon le schéma

$$S^{*-1} t_{\nu\mu} S \qquad (7.8)$$

ou selon le schéma

$$S^{-1} t_{\nu\mu} S. \qquad (7.9)$$

Dans le premier cas, on forme un quadrupode vectoriel dont les composantes $t_{4\nu}$ et $t_{\nu 4}$ forment le quadrivecteur courant et le pseudo-quadrivecteur de spin, bien connus en théorie de Dirac.

Dans le second cas, nous formons un tripode bivectoriel dont un des membres est le tenseur antisymétrique gauche, représentant le « moment magnétique et électrique » de l'électron de Dirac.

Nous aurons besoin de tenir compte de l'existence de ces quadrupode et tripode, lorsqu'il s'agira d'écrire les équations d'onde relative à une grandeur quadrivectorielle du genre espace, attachée à un corpuscule de spin 1.

En revenant à la formule de Cayley et à sa conjuguée nous voyons qu'elles peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} (P_4.1 + e'_k P^k) S &= (P'_4.1 - e_k P'^k) S^* \quad \left(P_4 = i\frac{w}{c}\right), \\ (P_4.1 - e'_k P^k) S^* &= (P'_4.1 + e_k P'^k) S \quad (P_4^* = -P_4), \end{aligned}\right\} \quad (7.10)$$

équations qui peuvent s'écrire à l'aide des matrices à huit lignes et à huit colonnes, de la manière que voici :

$$\left\{P_4 . 1 + \begin{vmatrix} e'_k & 0 \\ 0 & -e'_k \end{vmatrix} P_k\right\}\begin{pmatrix} S \\ S^* \end{pmatrix} = \left\{P'_4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -e_k \\ e_k & 0 \end{vmatrix} P'_k\right\}\begin{pmatrix} S \\ S^* \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

(L'application de l'opération

$$\left\{P_4 . 1 - \begin{vmatrix} e'_k & 0 \\ 0 & -e'_k \end{vmatrix} P_k\right\}$$

conduit bien à la relation

$$P_4^2 + P_k P^k = P'^2_4 + P'_k P'^k.)$$

Dans le cas d'un vecteur genre « temps », nous avons donc

$$\left\{P_4 . 1 + \begin{vmatrix} e'_k & 0 \\ 0 & -e'_k \end{vmatrix} P_k\right\}\begin{vmatrix} S \\ S^* \end{vmatrix} = im_0 c \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} S \\ S^* \end{vmatrix}. \quad (7.12)$$

Et dans le cas d'un vecteur genre « espace » :

$$\left\{x_4 . 1 + \begin{vmatrix} e'_k & 0 \\ 0 & -e'_k \end{vmatrix} x_k\right\}\begin{vmatrix} S \\ S^* \end{vmatrix} = r_k \begin{vmatrix} 0 & -e_k \\ e_k & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} S \\ S^* \end{vmatrix}, \quad (7.13)$$

avec

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \lambda^2.$$

Nous allons condenser l'écriture de ces équations en écrivant S à la place de la colonne S_1, S_2, S_3, S_4; S_1^*, S_2^*, S_3^*, S_4^* et en introduisant les matrices de rang 8, suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \\ \Gamma_k &= \Gamma_4 \begin{vmatrix} e'_k & 0 \\ 0 & -e'_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -e'_k \\ e'_k & 0 \end{vmatrix}, \\ \Gamma'_k &= \begin{vmatrix} 0 & -e_k \\ e_k & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (7.14)$$

qui vérifient les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\mu \Gamma_\nu &= 2\delta_{\mu\nu}, \\ \Gamma'_k \Gamma'_l + \Gamma'_l \Gamma'_k &= 2\delta_{lk}, \\ \Gamma'_k \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma'_k &= 0 \\ (\nu, \mu = 1, 2, 3, 4;\ k, l &= 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \quad (7.15)$$

Cela étant, nous pouvons écrire les équations précédentes de la manière que voici :

$$\left.\begin{aligned} (\Gamma_\nu p^\nu - im_0 c) S &= 0, \\ (\Gamma^\mu x_\mu - r_k \Gamma'^k) S &= 0, \qquad r_k r^k = \lambda^2. \end{aligned}\right\} \quad (7.16)$$

8. **Champs spinoriels non localisables dans le cas d'un vecteur réciproque x_μ du genre « espace ».** — Il nous est facile maintenant d'écrire les équations auxquelles doit satisfaire un champ $\Sigma(x_\mu, p^\nu)$ non localisable, généralisant le champ demi-vectoriel $S(x_\mu)$. Nous poserons

$$\left.\begin{aligned} [p^\nu, \Gamma_\nu \Sigma] - im_0 c \Sigma &= 0, \\ [x_\mu, \Gamma^\mu \Sigma] - r_k \Gamma'^k \Sigma &= 0, \qquad r_k r^k = \lambda^2. \end{aligned}\right\} \quad (8.1)$$

Pour obtenir les conditions de compatibilité de ces équations, nous allons appliquer à la première d'entre elles l'opération $[x_\mu, \Gamma^\mu, \ldots]$ et à la seconde $[p^\nu, \Gamma_\nu, \ldots]$, les matrices Γ pouvant d'ailleurs être mises en dehors de la parenthèse. On obtient ainsi

$$\Gamma^\mu \Gamma_\nu \big[x_\mu, [p^\nu, \Sigma]\big] = imc r_k \Gamma'^k \Sigma = -\Gamma_\nu \Gamma^\mu \big[p^\nu, [x_\mu \Sigma]\big].$$

D'où on tire, compte tenu du fait que

$$\big[x_\mu, [p^\nu, \Sigma]\big] \equiv \big[p^\nu, [x_\mu, \Sigma]\big],$$

quels que soient μ et ν, et des relations

$$\Gamma^\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma^\mu = 2\delta_\nu^\mu,$$

la condition de compatibilité suivante :

$$\big[x_\mu, [p^\mu, \Sigma]\big] = 0, \quad (8.2)$$

prenant, dans la représentation (X, r), la forme

$$r_\mu \frac{\partial \Sigma(X, r)}{\partial X^\mu} = 0. \quad (8.3)$$

Et c'est ainsi que nous parvenons bien aux solutions, qui, dans l'espace de r sont nulles partout, sauf sur la sphère de rayon λ.

Manuscrit reçu le 18 janvier 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Born M. — *Proc. Roy. Soc.*, 1938, **165**, 291; **166**, 552. — Born M. et Green H. S. — *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1949, **62**, 470.

[2] Yukawa H. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 300 et 1731.

[3] Kwal B. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 184.

[4] Kwal B. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 276.

[5] Kwal B. — *C. R. Acad. Sc.*, 1936, **203**, 983; *J. Physique*, 1937, **8**, 81.

[6] *C. R. Acad. Sc.*, 1934, **198**, 1582; *J. Physique*, 1934, **5**, 445; *Bull. Sc. math.*, 1935, **59**, 328.

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE L'HYDRODYNAMIQUE

Par Antonio GIÃO.

Sommaire. — Les équations intégrales de l'hydrodynamique, donnant en chaque point du domaine occupé par un fluide les valeurs des inconnues (vitesse, pression, densité, etc.) en fonction des conditions initiales dans tout le fluide et des valeurs aux limites sur les surfaces frontières, ont été déduites jusqu'à présent sous certaines conditions restrictives (mouvements lents ou à tourbillons négligeables, fluides incompressibles, viscosité constante) faisant disparaître les termes non linéaires des équations aux dérivées partielles. Nous exposons dans ce Mémoire une nouvelle méthode qui généralise la méthode d'Oseen et permet d'écrire les équations intégrales de l'hydrodynamique pour des mouvements quelconques et quelle que soit la compressibilité ou la viscosité du fluide.

Nous pensons que les nouvelles équations sont susceptibles de nombreuses applications, mais nous nous bornerons ici à une application à la théorie des perturbations, afin de montrer comment la connaissance des actions extérieures qui agissent sur un fluide permet de résoudre le problème de la prévision de l'évolution du fluide par la détermination de la perturbation en fonction des seules conditions initiales.

I. — Le problème général de l'hydrodynamique.

1. Les équations fondamentales. — Quand on étudie le mouvement interne d'un milieu fluide au point de vue eulérien (variations des propriétés en un point fixe du référentiel choisi) les équations fondamentales aux dérivées partielles de l'hydrodynamique sont les suivantes en notation vectorielle

$$\left.\begin{aligned} a.\quad & \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\vec{V} + 2\vec{\Omega}\times\vec{V} = -\alpha\nabla P + \vec{g} + \kappa\Delta\vec{V} + \vec{F}, \\ b.\quad & \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\alpha = \alpha\nabla.\vec{V}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Voici la signification des différents symboles :

$\vec{V}$, vitesse des particules fluides par rapport à un référentiel $R(x, y, z)$;

P, pression;

α, volume spécifique $\left(\text{densité } \rho \equiv \frac{1}{\alpha}\right)$;

$\vec{g}$, forces extérieures (en général la pesanteur);

$\vec{\Omega}$, vitesse angulaire de rotation du référentiel R par rapport à un référentiel galiléen R_a;

κ, constante arbitraire (que nous prendrons par exemple égale à la valeur moyenne de $\alpha\mu$ dans tout le domaine occupé par le fluide, μ étant le coefficient de viscosité);

$\vec{F} \equiv \vec{\mathcal{F}} - \kappa\Delta\vec{V}$, où $\vec{\mathcal{F}}$ est la force de frottement par unité de masse;

t, temps, $\frac{\partial}{\partial t}$ opérateur de dérivation partielle par rapport au temps;

∇, opérateur hamiltonien ou opérateur gradient ($\nabla. \equiv$ div, $\nabla\times \equiv$ rot; $\nabla.\nabla \equiv \Delta$, laplacien);

$\times$ et ., multiplications vectorielle et scalaire.

A l'exception du cas particulier d'un fluide incompressible à viscosité constante et pour lequel on admet qu'il est possible d'exprimer le tenseur des efforts de frottement en fonction du tenseur des déformations, le système (1 *a*, *b*) n'est pas complet. Il faut lui ajouter l'équation qui exprime le premier principe de la thermodynamique et les équations d'état du fluide. Ces équations sont les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t} + \alpha P\nabla.\vec{V}; \\ & T = f(\alpha, P); \qquad E_i = \varphi(T, \alpha, P), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Q étant la quantité de chaleur gagnée ou perdue par les particules, E_i l'énergie interne rapportée à l'unité de masse et T la température absolue. L'opérateur

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}.\nabla \quad (3)$$

est l'opérateur des variations individuelles (variations sur les éléments matériels). Si le fluide est un gaz parfait (au sens thermodynamique), on a $E_i = C_v T$ et les équations (2) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C_v\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + RT\nabla.\vec{V}, \\ & \alpha P = RT, \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

C_v étant la chaleur spécifique sous volume constant et R la constante du gaz.

Dans le cas du fluide compressible où l'on peut exprimer $\vec{\mathcal{F}}$ en fonction de $\vec{V}$ et de coefficients de viscosité supposés connus, le système (1) + (2) n'est un système complet que si, par exemple, la fonction Q est une donnée du problème. Il y a alors les sept inconnues $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$, P, α, T, E_i et les sept équations (1) + (2).

2. Position du problème général. — Nous donnons le nom d'*équations intégrales de l'hydrodynamique* aux équations qui expriment la solution

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}(x, y, z, t), \quad P(x, y, z, t); \\ \alpha(x, y, z, t), \quad T(x, y, z, t), \quad E_i(x, y, z, t)\end{array}\right\} \quad (4)$$

du système (1) + (2) en un point $M(x, y, z)$ du domaine $D(t)$ occupé par le fluide pour toute valeur de $t \geqq t_0$ après un instant initial arbitraire t_0 en fonction des valeurs initiales

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}_0(x, y, z, t_0), \quad P_0(x, y, z, t_0); \\ \alpha_0(x, y, z, t_0), \quad T_0(x, y, z, t_0), \quad (E_i)_0(x, y, z, t_0)\end{array}\right\} \quad (5)$$

dans tout le domaine $D(t_0)$ et des valeurs aux limites

$$\left.\begin{array}{llll}\vec{V}, & \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial n}, & P, & \dfrac{\partial P}{\partial n}; \\ \alpha, & \dfrac{\partial \alpha}{\partial n}, & T, & \dfrac{\partial T}{\partial n}, \quad E_i, \quad \dfrac{\partial E_i}{\partial n}\end{array}\right\} \quad (6)$$

sur la ou les surfaces frontières $S(t)$ de $D(t)$ pour toutes les valeurs de $t \geqq t_0$. L'opérateur $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne une dérivation suivant les normales n aux $S(t)$ et éventuellement les dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial n^2}$ des inconnues jouent le rôle de valeurs aux limites. Il va sans dire que les valeurs aux limites ne peuvent pas être choisies arbitrairement, car on a la condition cinématique

$$\vec{V}.\vec{n} = V_N \quad (7)$$

sur $S(t)$, V_N désignant la composante normale de la vitesse des éléments des $S(t)$. D'autre part, sur une surface libre on a la condition $P = 0$.

S'il est possible d'établir de telles équations intégrales correspondant, *sans aucune restriction*, au système (1) + (2), alors on peut dire que le problème général de l'hydrodynamique est résolu. En effet, la théorie des équations aux dérivées partielles nous apprend qu'il est de l'essence même du système (1) + (2) que sa solution générale se présente sous la forme d'équations intégrales. On voit donc que la thermo-hydrodynamique classique, dont le contenu est exprimé par le système (1) + (2), ne peut conduire, dans le cas général, à la solution du problème fondamental de la *prévision de l'évolution* d'un milieu fluide, puisque les valeurs aux limites (6) sont en général des inconnues pour $t > t_0$. La prévision des valeurs aux limites est même la partie la plus importante de certains problèmes (le problème atmosphérique par exemple). Pour pouvoir résoudre le problème de la prévision il faut donc ajouter aux principes de la thermo-hydrodynamique un autre principe permettant en quelque sorte d'éliminer l'influence des valeurs aux limites dans les équations intégrales, en les remplaçant par des expressions ne faisant intervenir que les conditions initiales. C'est ce que permet de faire la théorie des perturbations dont il sera question plus loin.

Cette impossibilité foncière où se trouve la thermo-hydrodynamique classique de résoudre le problème de la prévision de l'évolution d'un fluide (quand les valeurs aux limites ne sont pas des données) est d'ailleurs toute naturelle. Il est clair en effet que l'évolution d'un fluide ne peut être *complètement déterminée* que si l'on connaît les actions extérieures qui représentent les liaisons (mécaniques, thermodynamiques, électromagnétiques) entre le fluide et le reste du monde. Les équations de la thermo-hydrodynamique doivent donc être insuffisantes pour traiter le problème de la prévision puisqu'elles établissent une séparation en quelque sorte arbitraire entre le fluide et le milieu extérieur, et c'est précisément en se donnant les valeurs aux limites qu'on peut suppléer à l'ignorance des actions extérieures. Au point de vue des équations de la thermo-hydrodynamique, le *phénomène hydrodynamique* décrit par le système (1) + (2) se comporte comme un *phénomène autonome* dans une certaine région du monde et les actions extérieures sont représentées par les valeurs aux limites.

Pour arriver à résoudre un problème de prévision pour un fluide il est alors indiqué de décrire l'influence des actions extérieures non pas à l'aide des valeurs aux limites (qu'il est en général impossible de considérer comme des données) mais en considérant dans le domaine de l'espace occupé par le fluide un *phénomène hydrodynamique auxiliaire*, satisfaisant donc à toutes les équations du système (1) + (2) et représentant, en chaque point de ce domaine, l'effet *direct* des actions extérieures sur le fluide. Si ce phénomène hydrodynamique auxiliaire (qu'on peut appeler le *mouvement entretenu* par les actions extérieures) peut être considéré comme une donnée, alors l'évolution du mouvement total (réellement observé) doit devenir complètement déterminée. En d'autres termes, la différence entre le mouvement total et le mouvement entretenu (la *perturbation*) ne doit plus dépendre que des conditions initiales dans tout le domaine. L'intérêt de l'introduction du phénomène hydrodynamique auxiliaire réside dans le fait que ce phénomène peut souvent être considéré comme quasi permanent alors même que les valeurs aux limites relatives au mouvement total sont très variables (avec le temps).

Nous verrons plus loin comment l'introduction du mouvement entretenu permet d'utiliser les équations intégrales de l'hydrodynamique pour la prévision de la perturbation.

II. — Équations intégrales de l'hydrodynamique.

3. Nouvelle forme (tensorielle) des équations aux dérivées partielles de l'hydrodynamique. — Pour déduire des équations (1) les équations intégrales correspondantes on a dû recourir jusqu'à présent à des conditions assez restrictives : mouvements lents ou à tourbillons négligeables, fluides incompressibles, viscosité constante. Les équations intégrales obtenues dans ces conditions (équations d'Oseen) sont très importantes, parce qu'il est clair que tout essai pour se libérer des conditions restrictives ne peut être qu'une généralisation des résultats classiques d'Oseen [1].

Pour arriver à des équations intégrales qui soient applicables aussi à des fluides compressibles à viscosité quelconque et en mouvement tourbillonnaire quelconque, prenons des coordonnées cartésiennes rectangulaires x^k $(k = 1, 2, 3)$ dans le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement du fluide et définissons par

$$V^m_{,k} \equiv \frac{\partial V^m}{\partial x^k} \quad (k, m = 1, 2, 3) \tag{8}$$

un tenseur $V^m_{,k}$. En posant

$$\vec{A} = -\alpha\nabla P + \vec{g} - 2\vec{\Omega}\times\vec{V} + \vec{F} - \vec{V}.\nabla\vec{V}, \tag{9}$$

les équations (1 *a*) s'écrivent

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} - \varkappa\,\Delta\vec{V} = \vec{A}, \tag{10}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial V^m_{,k}}{\partial t} - \varkappa\,\Delta V^m_{,k} = \frac{\partial A^m}{\partial x^k}, \tag{11}$$

Le système (1) des équations fondamentales de l'hydrodynamique prend donc la forme tensorielle

$$\left.\begin{array}{ll} a. & \dfrac{\partial V^m_{,k}}{\partial t} - \varkappa\,\Delta V^m_{,k} = \dfrac{\partial A^m}{\partial x^k}; \\ b. & \dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha V^m_{,m} \end{array}\right\} \tag{12}$$

et nous allons voir qu'il est possible d'écrire les équations intégrales qui correspondent rigoureusement au système (12 *a*), c'est-à-dire les équations qui expriment les grandeurs $V^m_{,k}$, en un point quelconque M du domaine $D(t)$ occupé par le fluide et pour toute valeur de $t > t_0$, en fonction des valeurs initiales

$$(V^m_{,k})_0(x^i, t_0) \tag{13}$$

dans tout le domaine $D(t_0)$ et des valeurs aux limites

$$V^m_{,k}; \quad \frac{\partial V^m_{,k}}{\partial n}; \quad A^m, \tag{14}$$

ou, ce qui revient au même, des valeurs aux limites

$$\vec{V}, \quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial n}, \quad \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial n^2}, \quad \vec{A} \tag{15}$$

pour $t \geqq t_0$ sur la ou les surfaces frontières de $D(t)$. Désignons par Δ_2 le laplacien bidimensionnel relatif à ces frontières $S(t)$. On sait que l'on a sur S

$$\Delta\vec{V} = \Delta_2\vec{V} + \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial n^2} + 2\chi\frac{\partial\vec{V}}{\partial n}, \tag{16}$$

χ étant la courbure moyenne de S. D'autre part, en utilisant les formules de Navier-Stokes pour la force de frottement, les expressions (9) deviennent

$$\begin{aligned} \vec{A} = &-\alpha\nabla P + \vec{g} - 2\vec{\Omega}\times\vec{V} - \vec{V}.\nabla\vec{V} \\ &+ (\alpha\mu - \varkappa)\Delta\vec{V} + \alpha(\mu + \lambda)\nabla\left(\nabla.\vec{V}\right) \\ &\alpha\left(\nabla\mu.\nabla\vec{V}\right) + \nabla\vec{V}.\nabla\mu + \left(\nabla.\vec{V}\right)\nabla\lambda, \end{aligned} \tag{17}$$

μ et λ étant les deux coefficients de viscosité. On voit donc, grâce à (16), que les valeurs aux limites de $\vec{A}$ sont connues quand on connaît les valeurs aux limites suivantes :

$$\left.\begin{array}{llllll} \vec{V}, & \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial n}, & \dfrac{\partial^2\vec{V}}{\partial n^2}, & P, & \dfrac{\partial P}{\partial n}, & \alpha \\ \mu, & \dfrac{\partial\mu}{\partial n}, & \lambda, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial n} & & \end{array}\right\} \text{sur } S(t). \tag{18}$$

Indépendamment d'ailleurs de la définition physique de $\vec{A}$ par les équations de l'hydrodynamique et les formules de Navier-Stokes, les relations (10) et (16) montrent que l'on a

$$\vec{A} = -\varkappa\left(\Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial n^2} + 2\chi\frac{\partial}{\partial n}\right)\vec{V} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \quad \text{sur } S(t), \tag{19}$$

de sorte qu'on peut remplacer les valeurs aux limites (18) par les valeurs aux limites suivantes :

$$\vec{V}, \quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}, \quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial n}, \quad \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial n^2} \quad \text{sur } S(t) \tag{20}$$

[remarquons que si les frontières sont invariables, les valeurs de $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ sur $S(t)$ se déduisent des valeurs aux limites de $\vec{V}$ et l'on a alors simplement

$$\vec{V}, \quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial n}, \quad \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial n^2} \quad \text{sur } S, \tag{21}$$

comme valeurs aux limites du problème].

4. Équations adjointes du système (12). — En désignant par τ la variable temps, nous écrirons ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} &a. \quad \frac{\partial \overline{W}_i^k}{\partial \tau} - \varkappa \Delta \overline{W}_i^k = \frac{\partial \bar{B}^k}{\partial x^i}; \\ &b. \quad \overline{W}_{i,k}^k = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

$\overline{W}_i^k$ étant un tenseur symétrique qui sera déterminé ci-dessous. Pour trouver la solution élémentaire du système adjoint posons

$$r = \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2}, \tag{23}$$

x^i étant les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point M' de $D(\tau)$ et x_0^i les coordonnées d'un autre point M de $D(\tau)$, pôle de la solution élémentaire. Considérons la fonction

$$\Phi(r, t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}}, \tag{24}$$

qui satisfait comme on sait à l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \varkappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0. \tag{25}$$

Formons la fonction

$$\Psi = \frac{1}{r} \int_{r'}^{r} \Phi \, d\xi, \tag{26}$$

r' étant une constante indépendante de r. Elle satisfait à l'équation

$$\Delta\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \varkappa \Delta \Psi\right) = 0. \tag{27}$$

Considérons alors le tenseur symétrique

$$\overline{W}_i^k = -(\Delta \Psi)\delta_i^k + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x_k}, \tag{28}$$

qu'on peut appeler tenseur d'Oseen et qui satisfait à l'équation (22 *b*). Les équations (22 *a*) seront aussi satisfaites par $\overline{W}_i^k$, grâce à (27), en définissant le vecteur $\bar{B}^k$ par la relation

$$\bar{B}^k = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \varkappa \Delta \Psi\right). \tag{29}$$

Par suite de (27) on voit que ce vecteur satisfait à la condition

$$\Delta \bar{B}^k = 0. \tag{30}$$

5. Équations intégrales pour le tenseur $V_{,k}^m$. — Considérons les équations (12 *a*) où nous désignons maintenant par τ la variable temporelle

$$\frac{\partial V_{,k}^m}{\partial \tau} - \varkappa \Delta V_{,k}^m = \frac{\partial A^m}{\partial x^k}.$$

Multiplions ces équations par $\overline{W}_i^k$, les équations (22 *a*) par $V_{,k}^m$, additionnons les résultats obtenus et sommons par rapport à l'indice muet k. Par suite de la symétrie des tenseurs $\overline{W}_i^k$ et $\frac{\partial \bar{B}^k}{\partial x^i}$ on obtient l'expression

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\overline{W}_i^k V_{,k}^m) - \varkappa(\overline{W}_i^k \Delta V_{,k}^m - V_{,k}^m \Delta \overline{W}_i^k) = \overline{W}_i^k \frac{\partial A^m}{\partial x^k} + V_{,k}^m \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_k}, \tag{31}$$

dont nous allons prendre l'intégrale de volume étendue à tout le domaine $\bar{D}(\tau)$ compris entre la ou les surfaces frontières $S(\tau)$ du fluide et la surface d'une sphère Σ de rayon r' centrée au point M de $D(\tau)$

$$\int_{\bar{D}(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau}(\overline{W}_i^k V_{,k}^m) d\omega - \varkappa \int_{\bar{D}(\tau)} (\overline{W}_i^k \Delta V_{,k}^m - V_{,k}^m \Delta \overline{W}_i^k) d\omega = \int_{\bar{D}(\tau)} \left(\overline{W}_i^k \frac{\partial A^m}{\partial x^k} + V_{,k}^m \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_k}\right) d\omega.$$

Les V^m étant supposés satisfaire à des conditions de régularité convenables, la formule de Green donne

$$\begin{aligned} -\int_{\bar{D}(\tau)} (\overline{W}_i^k \Delta V_{,k}^m - V_{,k}^m \Delta \overline{W}_i^k) d\omega &= \int_{S(\tau)} \left(\overline{W}_i^k \frac{\partial V_{,k}^m}{\partial n} - V_{,k}^m \frac{\partial \overline{W}_i^k}{\partial n}\right) ds \\ &+ \int_{\Sigma} \left(\overline{W}_i^k \frac{\partial V_{,k}^m}{\partial r} - V_{,k}^m \frac{\partial \overline{W}_i^k}{\partial r}\right) d\sigma, \end{aligned} \tag{31'}$$

où les normales n à $S(\tau)$ sont dirigées vers l'intérieur de $D(\tau)$. D'autre part, les conditions (22 *b*) et (30) permettent d'écrire, en appliquant la formule de Gauss, les transformations

$$\int_{\bar{D}(\tau)} \overline{W}_i^k \frac{\partial A^m}{\partial x^k} d\omega = -\int_{S(\tau)} n_k \overline{W}_i^k A^m \, ds - \int_{\Sigma} n_k \overline{W}_i^k A^m \, d\sigma,$$

et

$$\int_{\bar{D}(\tau)} V_{,k}^m \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_k} d\omega = \int_{\bar{D}(\tau)} \frac{\partial V^m}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_k} d\omega = -\int_{S(\tau)} V^m \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial n} ds - \int_{\Sigma} V^m \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial r} d\sigma,$$

les n_k étant les composantes covariantes des normales *unitaires* (remarquons qu'il n'y a ici aucune différence entre covariance et contravariance puisqu'il s'agit de coordonnées cartésiennes rectangulaires dans l'espace euclidien). Finalement, $\overline{W}_i^k V_{,k}^m$, étant une fonction continue, on peut écrire

$$\int_{\bar{D}(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau}(\overline{W}_i^k V_{,k}^m) d\omega = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\bar{D}(\tau)} \overline{W}_i^k V_{,k}^m \, d\omega - \int_{S(\tau)} \overline{W}_i^k V_{,k}^m V_n \, ds,$$

V_n désignant la composante normale [positive vers l'intérieur de $S(\tau)$] de la vitesse de déplacement des

éléments de S. Ces différentes transformations donnent donc à (31′) la forme

$$\int_{\Sigma}\left[\varkappa\left(\overline{W}_i^k\frac{\partial V_{,k}^m}{\partial r}-V_{,k}^m\frac{\partial \overline{W}_i^k}{\partial r}\right)+n_k\overline{W}_i^kA^m\right]d\sigma$$
$$=-\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{D(\tau)}\overline{W}_i^kV_{,k}^m\,d\omega$$
$$-\int_{S(\tau)}\left[\varkappa\left(\overline{W}_i^k\frac{\partial V_{,k}^m}{\partial n}-V_{,k}^m\frac{\partial \overline{W}_i^k}{\partial n}\right)+n_k\overline{W}_i^kA^m+\overline{W}_i^kV_{,k}^mV_n\right]ds$$
$$-\int_{S(\tau)}V^m\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial n}\,ds-\int_{\Sigma}V^m\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial r}\,d\sigma.$$

Intégrons cette expression par rapport à τ de $\tau=t_0$ à $\tau=t$, en tenant compte du fait que $\overline{W}_i^k$ s'annule pour $\tau=t$, d'après sa définition (28) et (24). Il vient

$$\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{\Sigma}\left[\varkappa\left(\overline{W}_i^k\frac{\partial V_{,k}^m}{\partial r}-V_{,k}^m\frac{\partial \overline{W}_i^k}{\partial r}\right)+n_k\overline{W}_i^kA^m\right]d\sigma$$
$$=\int_{D(t_0)}\overline{W}_i^kV_{,k}^m\,d\omega$$
$$-\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{S(\tau)}\left[\varkappa\left(W_i^k\frac{\partial V_{,k}^m}{\partial n}-V_{,k}^m\frac{\partial W_i^k}{\partial n}\right)+n_kW_i^kA^m+W_i^kV_{,k}^mV_n\right]ds$$
$$-\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{S(\tau)}V^m\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial n}\,ds-\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{\Sigma}V^m\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial r}\,d\sigma. \quad (32)$$

Il faut chercher maintenant la limite de cette expression lorsqu'on fait tendre vers zéro le rayon r' de la sphère Σ. Désignons par W_i^k le tenseur défini par l'expression (28) de $\overline{W}_i^k$ en y remplaçant la fonction $\overline{\Psi}$ par la fonction $\Psi=\lim_{r'\to 0}\overline{\Psi}$. Un calcul facile basé sur l'expression (28) et tout à fait analogue à un calcul bien connu d'Oseen [2], permet de démontrer :

1° que la limite pour $r'\to 0$ du premier membre de (32) est nulle;

2° que les limites pour $r'\to 0$ des intégrales du second membre où intervient $\overline{W}_i^k$ s'obtiennent simplement en y remplaçant $\overline{W}_i^k$ par W_i^k.

De plus, un calcul élémentaire basé sur (29) donne

$$B_i=\frac{r'(x_i-(x_i)_0)}{2r'^3}\,\frac{\Phi(r',\tau)}{t-\tau}, \quad (33)$$

d'où l'on déduit sur Σ

$$\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial r}=-\frac{(x_i-(x_i)_0)}{r'^3}\,\frac{\Phi(r',\tau)}{t-\tau}.$$

En développant V^m en série de Taylor dans le voisinage du pôle $M(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, on aura donc

$$\lim_{r'\to 0}\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{\Sigma}V^m\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial r}\,d\sigma$$
$$=-\frac{4\pi}{3}\lim_{r'\to 0}r'\int_{t_0}^{t}(V_{,i}^m)_M\frac{\Phi(r',\tau)}{t-\tau}\,d\tau.$$

Or, on a démontré [2] que l'on a

$$\lim_{r'\to 0}r'\int_{t_0}^{t}h(\tau)\frac{\Phi(r',\tau)}{t-\tau}\,d\tau=-2\sqrt{\pi\varkappa}\,h(t) \quad (34)$$

pour toute fonction continue $h(\tau)$, de sorte que

$$\lim_{r'\to 0}\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{\Sigma}V^m\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial r}\,d\sigma$$
$$=\frac{8\pi}{3}\sqrt{\pi\varkappa}\,[V_{,i}^m](x_0^1, x_0^2, x_0^3, t). \quad (35)$$

D'autre part, la même expression (33) donne

$$\frac{\partial B_i}{\partial n}=r'\frac{\Phi(r',\tau)}{2(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{(x_i-(x_i)_0)}{r^3}\right]$$

et en tenant compte de (34) on obtient immédiatement

$$\lim_{r'\to 0}\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{S(\tau)}V^m\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial n}\,ds$$
$$=-\sqrt{\pi\varkappa}\int_{S(t)}V^m\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{x_i-(x_i)_0}{r^3}\right]ds. \quad (36)$$

Ces différents résultats, introduits dans (32), donnent finalement [3] les équations intégrales pour les $V_{,i}^m$

$$\frac{8\pi}{3}\sqrt{\pi\varkappa}\,V_{,i}^m(M, t)$$
$$=\int_{D(t_0)}(W_i^k)(t, \tau=t_0)(V_{,k}^m)(M', t_0)\,d\omega$$
$$-\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{S(\tau)}\left[\varkappa\left(W_i^k\frac{\partial V_{,k}^m}{\partial n}-V_{,k}^m\frac{\partial W_i^k}{\partial n}\right)+W_i^k(n_kA^m+V_{,k}^mV_n)\right]ds$$
$$+\sqrt{\pi\varkappa}\int_{S(t)}V^m\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{x_i-(x_i)_0}{r^3}\right]ds. \quad (37)$$

Elles expriment les $V_{,i}^m$, en un point quelconque $M(x_0^i)$ du domaine $D(t)$ pour tout instant $t>t_0$ en fonction des conditions initiales (13) et des conditions aux limites (14) ou, ce qui revient au même, des conditions aux limites (20). On peut montrer inversement qu'étant données des conditions initiales et aux limites continues, les fonctions (37) satisfont aux équations (12 *a*).

6. **Équations intégrales pour le vecteur $\vec{V}$.** — Ayant déterminé, par les équations intégrales (37), le tenseur $V_{,k}^m$ pour un fluide quelconque, la déter-

mination du champ de vitesse devient un problème classique. En effet, le rotationnel rot $\vec{V}$ et la divergence $\Theta = \operatorname{div} \vec{V}$ de la vitesse sont donnés par

$$\left(\operatorname{rot} \vec{V}\right)^i = V^k_{,j} - V^j_{,k}$$

$$(i, j, k = \text{permutation circulaire de } 1, 2, 3)$$

et

$$\Theta = V^i_{,i},$$

et sont donc déterminés par les équations générales (37). Du rotationnel et de la divergence on déduit la vitesse $\vec{V}$ elle-même quand on connaît sa composante normale sur les frontières S. Cette donnée aux limites fait précisément partie du système de conditions aux limites qui intervient dans les équations intégrales (37) pour les $V^m_{,i}$. Nous croyons inutile de reproduire ici le calcul, classique en Théorie du potentiel, qui donne $\vec{V}$ en fonction de rot $\vec{V}$, Θ et V_n.

7. Le problème général aux limites pour les fonctions continues spatio-temporelles. — La détermination des équations intégrales des $V^m_{,i}$, dont nous nous sommes occupé dans les paragraphes précédents, est en réalité purement phénoménologique, c'est-à-dire indépendante du fait que $\vec{V}$ est un champ de vitesse des particules d'un milieu fluide. En effet, pour une fonction continue spatio-temporelle quelconque $V(x^i, t)$ ayant des dérivées premières et secondes on peut écrire l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \varkappa \Delta V = A(x^i, t), \tag{38}$$

$\varkappa$ étant une constante arbitraire, et ceci d'une manière complètement indépendante de la définition physique éventuelle du second membre $A(x^i, t)$ de (38), par exemple la définition (17) par les équations de l'hydrodynamique. Si V possède des dérivées du troisième ordre, on déduit de (38)

$$\frac{\partial V_{,i}}{\partial t} - \varkappa \Delta V_{,i} = \frac{\partial A}{\partial x^i}.$$

Si la fonction continue V a des dérivées premières et secondes continues et des dérivées du troisième ordre bornées et intégrables, alors les équations intégrales (37) s'appliquent sans aucune modification aux $V_{,i} \equiv \frac{\partial V}{\partial x^i}$. Ayant déterminé les $V_{,i}$, nous pouvons en déduire

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial V}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(V_{,i})$$

et une application d'une formule classique donnera en chaque point M de $D(t)$

$$4\pi V(M, t) = -\int_{D(t)} G(M', M; t)\, \Delta V(M', t)\, \mathrm{d}\omega_{M'}$$
$$- \int_{S(t)} V(M', t) \frac{\partial G(M', M; t)}{\partial n} \mathrm{d}s,$$

$G(M', M; t)$ étant la fonction de Green du domaine $D(t)$, de pôle M, et s'annulant sur les frontières $S(t)$.

Les équations intégrales (37) permettent donc de résoudre phénoménologiquement le *problème général aux limites* pour toute fonction continue spatio-temporelle V ayant des dérivées premières et secondes continues et des dérivées du troisième ordre bornées et intégrables dans le domaine d'existence $D(t)$ de V, c'est-à-dire le problème de la détermination de V, en chaque point de $D(t)$ à tout instant $t > t_0$, en fonction des valeurs initiales $V(x^i, t_0)$ dans tout le $D(t_0)$ et des valeurs aux limites

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial n}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial n^2}.$$

sur les $S(t)$ pour $t \geq t_0$. Si l'on exigeait que $\frac{\partial V}{\partial t}$ ne fasse pas partie des valeurs aux limites, alors il faudrait recourir, si S dépend de t, à une définition de A *indépendante de* (38), comme la définition (17); les valeurs aux limites seraient alors

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial n}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial n^2}, \quad A.$$

mais le problème perdrait ainsi un peu de sa pureté phénoménologique.

8. Détermination de la densité et de la pression. — D'accord avec les résultats précédents, cette détermination, en fonction des valeurs initiales et aux limites, peut être faite phénoménologiquement, sans utiliser les équations de l'hydrodynamique. Mais la détermination de la densité résulte aussi très simplement de l'équation de continuité (1 *b*), quand on a déterminé préalablement le champ de vitesse par les équations (37). Connaissant $\vec{V}$ on peut déduire des équations

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = V^i(x^1, x^2, x^3, t),$$

les coordonnées x^i des particules en fonction du temps et de leurs coordonnées initiales a^i (coordonnées de Lagrange)

$$x^i = x^i(a^1, a^2, a^3, t).$$

Alors, l'équation de continuité donne

$$\alpha(a^1, a^2, a^3, t) = \alpha_0(a^1, a^2, a^3, t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \Theta(a^1, a^2, a^3, t)\, \mathrm{d}t},$$

l'intégration étant effectuée sur les trajectoires des particules.

Après avoir déterminé $\vec{V}$ et α, le calcul hydrodynamique de la pression peut être fait par l'équation du mouvement (1 *a*) quand on connaît les coefficients de viscosité qui interviennent dans l'expression des forces de frottement en fonction des dérivées spatiales de $\vec{V}$ (par exemple dans les formules de Navier-Stokes).

III. — Application à la théorie de perturbations.

9. Examen d'un cas particulier. — Considérons un milieu fluide *adhérant* à ses surfaces frontières $S(t)$. La composante tangentielle de $\vec{V}$ sur $S(t)$ s'annule et la composante normale est donnée, comme toujours, par $\vec{V}.\vec{n} = V_n$. Envisageons un *phénomène hydrodynamique auxiliaire* décrit par des champs de vitesse $(\vec{V}^*)$, de pression (P^*), de volume spécifique (α^*), etc. La relation (9) permet de définir pour ce mouvement un vecteur $\vec{A}^*$ et en partant de conditions initiales et aux limites arbitraires les équations (37) donnent des grandeurs $(V^*)^m_{,i}$ satisfaisant aux équations (12 *a*). Supposons que les valeurs aux limites satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial n} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial n}, \\ &\alpha \frac{\partial^2 \vec{V}^*}{\partial n^2} + \vec{A}^* = \alpha \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial n^2} + \vec{A} \end{aligned}\right\} \text{sur } S(t). \qquad (39)$$

En tenant compte de la relation (16), de l'équation du mouvement (1 *a*), de la définition (9) de $\vec{A}^*$ et de la condition d'adhérence sur les $S(t)$, on voit facilement que les conditions (39) entraînent

$$\vec{\mathcal{F}}^* - \alpha^* \nabla P^* = \vec{\mathcal{F}} - \alpha \nabla P \qquad \text{sur } S(t). \qquad (40)$$

Si le mouvement réellement observé $(\vec{V}, P, \alpha)$ est en régime de Poiseuille ($\mathcal{F} = \alpha \nabla P$) dans le voisinage des parois $S(t)$, les conditions (40) exigent donc que le mouvement auxiliaire soit aussi en régime de Poiseuille dans le voisinage des parois.

Définissons une *perturbation* $(\vec{v}, p, \alpha')$ par

$$\vec{v} \equiv \vec{V} - \vec{V}^*; \qquad p \equiv P - P^*; \qquad \alpha' \equiv \alpha - \alpha^* \qquad (41)$$

et posons

$$v^m_{,i} \equiv \frac{\partial v^m}{\partial x^i}.$$

Les équations (37) étant linéaires, en les appliquant successivement au mouvement réellement observé et au mouvement auxiliaire on trouve simplement pour la perturbation, grâce aux conditions (39) et à la condition d'adhérence

$$\frac{8\pi}{3}\sqrt{\pi\alpha}\, v^m_{,i} = \int_{D(t_0)} W^k_i(t, \tau = t_0)\, [v^m_{,k}]\, (M', t_0)\, \mathrm{d}\omega_{M'}. \qquad (42)$$

On voit donc que la perturbation, définie par (41) par rapport au phénomène auxiliaire envisagé ici, a *une évolution déterminée complètement par les seules conditions initiales.*

10. Les équations intégrales de l'hydrodynamique et le principe fondamental de la théorie des perturbations spontanées. — Dans cette théorie [4], on décompose le mouvement réellement observé dans un fluide en deux parties :

1° le *mouvement entretenu*;

2° la *perturbation spontanée.*

En désignant par des astérisques les variables relatives au mouvement entretenu, la perturbation spontanée sera définie par les relations (41). Le mouvement entretenu correspond à l'effet des actions extérieures qui agissent sur le fluide et représente ces actions par des champs bien définis en chaque point du fluide au lieu de les représenter par des valeurs aux limites (*cf.* § 2). Le principe fondamental de la théorie des perturbations spontanées nous apprend que *la connaissance du mouvement entretenu est nécessaire et suffisante pour déterminer hydrodynamiquement l'évolution de la perturbation.* En d'autres termes, on peut toujours définir, dans un fluide soumis à des actions extérieures, un phénomène hydrodynamique auxiliaire satisfaisant aux équations de l'hydrodynamique, et dont la connaissance à tout instant permet de prévoir l'évolution du fluide. Ceci signifie que la perturbation spontanée, *définie par* (41) *par rapport au mouvement entretenu de la théorie des perturbations*, ne dépend pas, dans son évolution, des valeurs aux limites, et doit être complètement déterminée par les seules conditions initiales. Les équations (42), que nous avons déduites des équations intégrales (37) de l'hydrodynamique, en admettant un phénomène hydrodynamique auxiliaire adhérant aux surfaces frontières et satisfaisant aux conditions (39), peuvent donc être écrites en général. D'après ces équations (42), on voit que si la perturbation spontanée est nulle à un instant donné dans tout le fluide, elle sera nulle à tout instant ultérieur, *à la condition évidemment que les conditions de régularité nécessaires pour déduire les équations intégrales* (37) *soient valables à tout instant* $t > t_0$.

Si les actions extérieures sont constantes, le mouvement entretenu correspondant sera permanent, et alors toute l'évolution du fluide est une évolution de la perturbation spontanée. Elle résulte donc, dans ce cas important, uniquement des variations

temporelles des intégrales

$$\int_{D(t_0)} W_i^k(t, \tau = t_0)[v_{,k}^m](M', t_0)\,d\omega_{M'},$$

c'est-à-dire en dernière analyse des variations temporelles des fonctions Φ et Ψ qui interviennent dans la définition (28) du tenseur d'Oseen. De cette définition et des définitions (24) et (26) des fonctions Φ et Ψ on déduit sans difficulté pour $W_i^k(t, \tau = t_0)$

$$W_i^k(t, \tau = t_0) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{3(x^k - x_0^k)(x_i - (x_i)_0)}{r^2} - \delta_i^k\right](\Psi - \Phi)(r, t, \tau = t_0) + \frac{1}{2\varkappa}\left[\delta_i^k - \frac{(x^k - x_0^k)(x_i - (x_i)_0)}{r^2}\right]\frac{\Phi(r, t, \tau = t_0)}{t - t_0}.$$

Par suite de propriétés évidentes des fonctions Φ et Ψ on obtient immédiatement le résultat

$$\lim_{t - t_0 \to \infty} W_i^k(t, \tau = t_0) = 0,$$

qui entraîne, d'après (42), la conséquence importante que *la perturbation spontanée tend toujours vers zéro à la limite (pour $t - t_0 \to \infty$)*. Ce résultat n'est évidemment valable que si les $V_{,i}^m$ satisfont aux conditions de régularité qui permettent d'écrire les équations intégrales (37), c'est-à-dire s'ils sont continus, ont des dérivées premières continues et des dérivées secondes bornées et intégrables. Supposons que les valeurs de t pour lesquelles ces conditions de régularité ne sont pas satisfaites partout dans le domaine $D(t)$ forment un ensemble dénombrable d'instants que nous désignerons par t_n ($n = 1, 2, \ldots, \infty$). Les équations intégrales (37) et les équations correspondantes (42) pour la perturbation ne pourront alors s'appliquer que pour $t_0 \leq t < t_1$ et dans les intervalles $t_n < t < t_{n+1}$ et donneront pour chacun de ces intervalles les valeurs de la perturbation en fonction des conditions « initiales » $v_{,k}^m(M', t_n)$

$$\frac{8\pi}{3}\sqrt{\pi\varkappa}\, v_{,i}^m(M, t) = \int_{D(t_n)} W_i^k(t; \tau = t_n)[v_{,k}^m](M', t_n)\,d\omega_{M'},$$

de sorte qu'il faut opérer chaque fois avec de nouvelles conditions initiales; c'est précisément ce fait qui correspond au non-amortissement de la perturbation pour $t \to \infty$, les valeurs absolues des composantes du tenseur d'Oseen $W_i^k(t; \tau = t_n)$ augmentant avec t dans le voisinage de $t = t_n$ avant de tendre vers zéro pour $t \to \infty$. Remarquons que les singularités de la perturbation qui ont lieu aux instants t_n sont évidemment le résultat de singularités équivalentes dans le mouvement entretenu, car d'après le principe central de la théorie des perturbations l'évolution de la perturbation est complètement déterminée par la connaissance du mouvement entretenu. Remarquons enfin qu'on peut avoir un mouvement total sans singularités par la compensation des singularités du mouvement entretenu et de la perturbation.

Manuscrit reçu en juillet 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] OSEEN C. W. — Hydrodynamik, Leipzig, 1927.

[2] VILLAT H. — Leçons sur l'Hydrodynamique, Paris, 1929 (Chap. XIII).

[3] GIÃO A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1275.

[4] GIÃO A. — Nouvelles recherches sur les perturbations spontanées du mouvement des fluides avec des applications à l'hydrodynamique solaire. *Bull. Soc. Géo. Lisbonne*, 1943 (septembre-décembre), 1944 (janvier-avril) et *Portugaliæ Physica*, 1947, **2**, 203-234.

SUR LES RAYONNEMENTS β ET γ DE L'ACTINIUM ET DE L'ACTINIUM K

Par M. LECOIN, M. PEREY, M. RIOU et J. TEILLAC.
Institut du Radium, Paris.

Sommaire. — Le rayonnement γ de l'actinium et de l'actinium *K* a été étudié au moyen d'un compteur à xénon. La désintégration de l'actinium s'accompagne de l'émission d'un rayonnement γ de 37 keV (2,2 photons par 1 000 désintégrations), d'un rayonnement de 15 keV (5 photons par 100 désintégrations) caractérisé comme résultant de la conversion du rayonnement de 37 keV dans le niveau *L* du radioactinium. L'existence d'un rayonnement γ de 300 keV (2 photons par 1 000 désintégrations) reste douteuse.

Lors de sa désintégration l'actinium *K* émet : un rayonnement γ de 350 keV (6 photons par 100 désintégrations), un rayonnement γ de 48,6 keV (27 photons par 100 désintégrations) et un rayonnement *L* (25 photons par 100 désintégrations).

L'étude du rayonnement β émis par l'actinium a été faite au moyen d'une chambre Wilson à basse pression. Elle a montré la présence d'un rayonnement électronique de faible intensité (17 électrons par 100 désintégrations, au maximum). La répartition spectrale et l'intensité du rayonnement correspondent approximativement aux électrons émis lors de la conversion du rayonnement γ de 37 keV dans les niveaux *L* et *M*. L'énergie mise en jeu lors de la transition $\mathrm{Ac} \xrightarrow{\beta} \mathrm{RAc}$ semble donc être au moins de 37 keV. Dans 85 pour 100 des désintégrations de l'actinium, il devrait donc être émis un spectre continu β dont la limite supérieure serait de 37 keV, ce qui semble exclus d'après ces expériences.

1. Introduction. — Une première étude des rayonnements β et γ émis lors de la désintégration de l'actinium $\mathrm{Ac} \xrightarrow{\beta} \mathrm{RAc}$ a mis en évidence l'existence d'un rayonnement β peu important : 8 électrons de 10 à 20 keV sont émis pour 100 désintégrations d'actinium [1]; un rayonnement γ de 37 keV de très faible intensité (0,27 photons par 100 désintégrations), un rayonnement *X* ou γ de 15 keV très important (37 photons pour 100 désintégrations) sont également émis [2]. Il s'est avéré impossible d'établir avec ces résultats un schéma de désintégration satisfaisant pour l'actinium et de discuter utilement l'existence de phénomènes d'interaction entre le noyau et l'atmosphère électronique de l'atome pouvant expliquer l'absence d'électrons nucléaires (création *e*).

Nous avons repris l'étude de ces rayonnements en bénéficiant d'une part de nouvelles techniques de préparation de sources d'actinium beaucoup plus concentrées en actinium que celles utilisées jusqu'alors et d'autre part, des avantages qu'offrent les compteurs de Geiger-Muller par rapport aux chambres d'ionisation pour l'étude des rayonnements *X* et γ peu intenses.

2. Préparation des sources. — Dans toutes ces expériences il importe d'utiliser de l'actinium privé de tous ses dérivés. Nous avons déjà exposé par ailleurs la méthode utilisée pour arriver à un degré de pureté suffisant : cette méthode comporte de très nombreuses opérations chimiques. Pour effectuer correctement ces opérations il est nécessaire d'opérer en présence de quantités relativement importantes de lanthane (quelques centigrammes de lanthane pour 1 mC d'actinium). Même dans ces conditions il y a déjà perte d'actinium lors de l'élimination de l'actinium *X* : cette élimination se fait en ajoutant dans une solution d'actinium et de La_2O_3 un peu de baryum. On précipite La_2O_3 par l'ammoniaque décarbonatée. L'expérience montre que dans ces conditions une partie de l'actinium reste en solution, alors qu'une faible proportion de l'actinium *X* présent est précipité sur le lanthane. Pour se débarrasser complètement de l'actinium *X*, il est nécessaire de répéter plusieurs fois l'opération et la teneur en actinium de la préparation décroît à chaque tour de purification, cette perte d'actinium étant d'autant plus grande que la concentration en actinium est plus élevée. Il est donc impossible d'envisager la purification chimique de préparations d'actinium plus concentrées. Mais la présence de telles quantités de lanthane apporté une gêne importante dans l'étude des rayonnements *X* et γ très mous. En particulier la détermination de l'intensité absolue des rayonnements *L* de 15 keV sur de telles préparations ne peut s'effectuer qu'à l'aide de corrections importantes. Dans ces nouvelles expériences nous avons utilisé une nouvelle méthode très rapide de fractionnement des terres rares imaginée par l'un de nous [3] : elle consiste en des précipitations dans des conditions bien déterminées de concentrations, des terres rares actinifères par l'ammoniaque en excès, en présence de quantités variables d'acétate d'ammoniaque.

En opérant à la concentration de 70 g d'acétate

d'ammoniaque pour 1 g de lanthane actinifère on obtient, pour certaines concentrations d'ammoniaque, un précipité contenant 60 pour 100 du lanthane initial rigoureusement inactif; il reste en solution 40 pour 100 du lanthane avec tout l'actinium. En 2 h, après un certain nombre de tours de purification nous avons pu obtenir à partir de lanthane actinifère soigneusement purifié des dérivés de l'actinium, un produit contenant 0,5 mC d'actinium pour moins de 0,1 mg de La_2O_3 (masse de 1 mC d'actinium = 0,012 mg). La quantité de radioactinium et d'actinium *X* formée pendant ces deux heures est inférieure à 1 pour 100. Cette concentration en actinium est la plus forte qui ait été réalisée jusqu'à présent.

Les sources utilisées dans les expériences sur le rayonnement γ se présentaient sous la forme d'oxyde de lanthane actinifère calciné placé dans de petites coupelles de pyrex, hermétiquement closes par des lamelles de mica de 2 à 3 mg : cm²

3. **Étude du rayonnement** ***X*** **et de l'actinium et de l'actinium** ***K***. — 31. *Dispositif expérimental.* — Pour l'étude du rayonnement γ mou (inférieur à 100 keV) nous avons utilisé un compteur de Geiger-Muller à efficacité élevée pour de tels rayonnements. Ce compteur, déjà employé par l'un d'entre nous pour d'autres études [4], est un compteur en bout fermé par une feuille d'aluminium de 5 mg : cm² rempli de xénon sous une pression de 14 cm de mercure et d'alcool sous une pression de 2 cm. On place les sources à une distance variant de 10 à 20 cm de la fenêtre, suivant l'intensité des sources réalisées. Le rayonnement est canalisé par deux diaphragmes de plomb et les rayons γ sont éliminés par un champ magnétique de 1 700 gauss produit par un aimant permanent.

Pour les études des rayonnements γ d'énergie supérieure à 100 keV, nous avons utilisé un compteur de Geiger-Muller ordinaire en magnésium de 0,1 mm d'épaisseur entouré d'une feuille de plomb de 170 mg : cm² servant de radiateur. Dans certaines expériences nous avons utilisé également un compteur analogue tapissé intérieurement d'une feuille d'or de 19 mg : cm².

32. *Rayonnement γ de l'actinium et de l'actinium K.* — L'étude du rayonnement γ de l'actinium initialement privé de ses dérivés est rendue complexe par la croissance des dérivés d'actinium au cours de l'expérience. La durée des purifications et concentrations diverses de l'actinium variant de 2 à 3 h, on peut admettre que l'actinium est en équilibre avec l'actinium *K* au cours de toutes ces expériences. Comme nous le verrons au paragraphe 6, le nombre de désintégrations de radioactinium et d'actinium *X* formées pendant ce temps est inférieur à 1 pour 100 du nombre de désintégrations d'actinium, et les corrections à effectuer pour connaître le rayonnement propre à Ac + Ac *K* sont peu importantes, tout au moins pour les composantes intenses. La figure 1 représente une courbe d'absorption dans le cuivre obtenue avec le compteur à xénon et une source d'actinium de 1,9 mC dans 4 mg d'oxyde de lanthane.

On a commencé les mesures 3 h après la fin des purifications. La durée des mesures a été de 1 h environ.

D'autres sources d'intensité variant de 0,5 à 4 mC (poids de matière 0,1 à 20 mg de La_2O_3) ont donné des courbes identiques, mises à part les différences sur les intensités des rayonnements mous pour lesquels on doit tenir compte de l'absorption dans la matière constituant la source.

Le dispositif expérimental permettait d'étudier en même temps que l'absorption du rayonnement γ mou dans le cuivre au moyen du compteur à xénon, l'absorption dans le plomb au moyen du compteur à feuille d'or, le rayonnement γ ayant traversé le fond de la coupelle de pyrex.

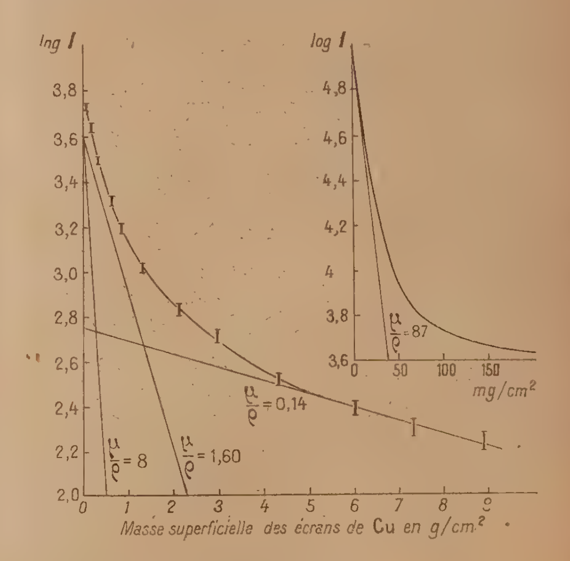


Fig. 1. — Absorption des rayons γ de Ac + Ac*K* dans le cuivre.

L'analyse graphique de toutes les courbes d'absorption obtenues donne des résultats cohérents et permet de distinguer les quatre composantes suivantes :

Coefficient d'absorption :				
Dans Cu (en cm² : g)...	0,14	1,60	8,0	87
Dans Pb (en cm² : g)...	0,60	5,2	11	—
Énergie (en keV).......	240	60	35	14,3

Les courbes d'absorption dans le cuivre semblent donner une indication peu certaine de l'existence

d'un groupe d'énergie voisine de 90 keV. D'autre part, la variation notable d'intensité dans le temps pour les composantes de 240 keV ne permet pas *a priori* d'attribuer cette composante à (Ac + AcK) nous reviendrons sur cette question plus loin en étudiant les courbes d'évolution des divers rayonnements. De plus, le rayonnement pénétrant semble être complexe et les courbes d'absorption dans le plomb obtenues avec le compteur à xénon et le compteur à feuille d'or indiquent qu'il existe au moins deux groupes pénétrants de coefficients d'absorption (en cm² : g) $0{,}22 \pm 0{,}02$ (400 keV) $0{,}9 \pm 0{,}2$ (220 keV) et peut être un groupe intermédiaire isolé avec le compteur à feuille d'or et de coefficient d'absorption 0,3 (340 keV).

Pour préciser la valeur des énergies des raies les moins pénétrantes, nous avons employé la méthode d'absorption sélective, le détecteur étant le compteur à xénon. Nous n'avons pu isoler l'hypothétique rayonnement de 90 keV par absorption dans les éléments Pt, Au, Hg, Tl, Pb et Bi (1). Par contre l'absorption dans les éléments allant de l'iode ($Z = 53$) au tungstène ($Z = 74$) nous a permis de caractériser une raie encadrée par les discontinuités K de $_{53}$I et $_{56}$Ba qui correspond à la raie de $36{,}8 \pm 0{,}7$ keV mieux isolée précédemment [1] et une raie nouvelle encadrée par les discontinuités K de $_{63}$Eu et $_{64}$Cd, ce qui donne une énergie égale à $48{,}6 \pm 1{,}6$ keV : en filtrant le rayonnement par 99 mg : cm² de cuivre et en ajoutant un écran d'oxyde de lutécium, puis un écran d'oxyde de gadolinium (120 mg : cm² en élément), le nombre d'impulsions par minute passe de 510 à 790. Cette raie s'identifie à la composante de 60 keV déduite des courbes d'absorption dans le cuivre et le plomb si l'on tient compte de l'imprécision que comporte l'analyse précédemment faite et du fait que l'absorption dans les éléments compris entre $_{64}$Gd et $_{74}$W n'indique aucune raie d'intensité notable entre 50 et 70 keV.

L'absorption dans les éléments allant de $_{26}$Fe à $_{48}$Cd permet d'analyser la composante de 14 keV; les écrans sont constitués soit de feuilles métalliques, soit de carbonates ou oxydes dilués dans la paraffine et ont des masses superficielles voisines de 10 mg : cm². Les raies isolées s'identifient aux raies L caractéristiques du thorium comme le montre le tableau ci-dessous, où l'on a indiqué les longueurs d'onde en U. X. des discontinuités K entre lesquelles se placent les raies observées et les raies L du thorium correspondantes dont la longueur d'onde est exprimée en U. X. $\left[\lambda(\text{u.x.}) = \frac{12{,}4 \cdot 10^3}{E(\text{keV})}\right]$.

D'autre part nous avons cherché s'il existait des rayonnements d'énergie inférieure à 10 keV en traçant les courbes d'absorption dans l'aluminium avec ou sans filtre de cuivre de 8,2 mg : cm² qui sert à renforcer les raies d'énergie inférieure à celle de la discontinuité K du cuivre (9 keV) : les deux courbes d'absorption sont identiques et donnent un coefficient d'absorption égal à 8 (15 keV), qui correspond bien au rayonnement L : nous pouvons donc dire qu'il n'existe pas de rayonnnement entre 5 et 10 keV d'intensité comparable à celle du rayonnement L. *Les rayonnements plus absorbables comme le rayonnement M ne pouvaient être observés avec notre dispositif.*

978.....	(34Se)	$L\alpha_1$	954
918.....	(35Br)	$L\alpha_2$	966
814.....	(37Rb)	$L\beta_4$	791
768.....	(38Sr)	$L\beta_2$	792
768.....	(38Sr)	$L\beta_1$	764
687.....	(40Zr)	$L\beta_3$	753
652.....	(41Nb)	$L\gamma_6$	631
619.....	(42Mo)	$L\gamma_3$	626

4. **Étude du rayonnement γ de l'actinium K.** — Malgré la courte période de l'actinium K (21 mn) nous avons pu, suivant une technique déjà exposée,

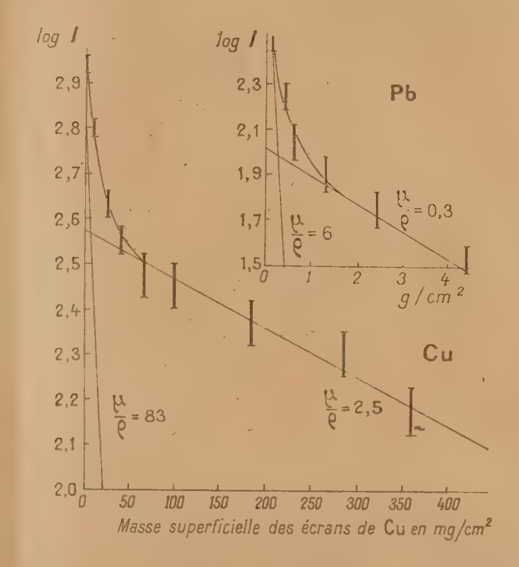


Fig. 2. — Absorption du rayonnement γ de l'actinium K dans Cu et Pb.

étudier le rayonnement γ en préparant une dizaine de sources et en disposant de part et d'autres de chacune d'elles deux compteurs : du côté de la feuille de mica le compteur à xénon pour étudier les rayonnements mous, du côté du culot de la coupelle de verre, le compteur à feuille d'or ou celui à feuille de plomb pour les rayonnements pénétrants. Toutes les mesures effectuées ont été ramenées à la valeur qu'elles auraient eu à l'instant zéro.

(1) Si ce rayonnement existe, il est beaucoup moins intense que les autres.

La courbe d'absorption dans le cuivre qui est représentée sur la figure 2, permet de distinguer nettement deux composantes de coefficients d'absorption 2,5 cm² : g (56 keV) et 83 cm² : g (14,5 keV). Nous avons pu isoler les raies correspondantes : le saut d'absorption entre les éléments Eu et Gd permet de retrouver la raie de $48,6 \pm 1,6$ keV déjà observée avec $Ac + AcK$; l'absorption dans les éléments $_{33}As$ $_{34}Se$ et $_{38}Sr$ entre lesquels se placent les raies de la composante de 14,5 keV indique que celle-ci se compose très vraisemblablement des raies *L* caractéristiques du radium, les courbes ayant un aspect voisin de celles obtenues par ailleurs [4] avec plus de précision pour l'ionium et le radioactinium qui émettent tous deux le rayonnement *L* du radium.

La courbe d'absorption dans le plomb (*fig.* 2) indique elle aussi par la composante de 0,6 g : cm² la raie de 48,6 keV et en plus montre qu'il existe un rayonnement plus pénétrant de coefficient d'absorption d'environ 0,3 cm : g (330 keV), ce qui est en bon accord avec la valeur plus précise de ce coefficient obtenue par Mlle Perey et M. Lecoin [5] : 0,2 cm² : g (400 keV). Il n'est du reste pas impossible que ce rayonnement énergique soit complexe.

5. **Évolution de l'activité γ des sources d'actinium.** — Avant d'affirmer l'attribution des différents rayonnements X et γ précédemment mis en évidence à la désintégration de l'actinium, il importe au préalable d'évaluer la part que peuvent y apporter la présence des dérivés de l'actinium dont l'activité croît avec le temps. Rappelons le schéma de désintégration de l'actinium :

$$Ac \begin{cases} \xrightarrow{\alpha} AcK \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\beta} RAc \xrightarrow{\alpha} \end{cases} AcX \xrightarrow{\alpha} An \xrightarrow{\alpha} AcA \xrightarrow{\alpha} AcB \xrightarrow{\beta} AcC \begin{cases} \xrightarrow{\beta} AcC' \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\alpha} AcC'' \xrightarrow{\beta} \end{cases} AcD.$$

Le nombre de désintégration λN de chacun des trois corps principaux AcK, RAc, AcX, au bout d'un temps *t* à partir d'un nombre d'atomes d'actinium *N* complètement privé de ses dérivés sera donc, les constantes radioactives étant exprimées en j^{-1} :

$$Ac = 0,00014,$$
$$AcK = 47,47,$$
$$RAc = 0,0366,$$
$$AcX = 0,0617;$$

$$(\lambda N)_{AcK} = (\lambda N_0)_{Ac} \times 0,011(1 - e^{-47,47t}),$$
$$(\lambda N)_{RAc} = (\lambda N_0)_{Ac} \times 1,00384(e^{-0,00014t} - e^{-0,0366t}),$$
$$(\lambda N)_{AcX} = (\lambda N_0)_{Ac}[1,00612(e^{-0,00014t} - 1,452\, e^{-0,0366t} + 1,4526\, e^{-0,0617t}) + 0,011(1,0016\, e^{-0,00014t} + 0,0613014\, e^{-47,47t} - 1,0029\, e^{-0,0617t})].$$

Le deuxième terme dans l'expression de $(\lambda N)_{AcX}$ correspond à la formation d'actinium *K* par l'intermédiaire d'actinium *K*, terme non négligeable au bout de quelques heures. Les courbes de formation sont données sur la figure 3.

On peut admettre, étant donné la courte période du dépôt actif devant celle de l'actinium *X*, que celui-ci est constamment en équilibre avec le dépôt actif, si l'on se trouve en vase clos comme c'est le cas dans toutes ces expériences. Le rayonnement γ correspondant est donc celui de l'actinium *X* en équilibre avec tous ses dérivés. La courbe n° 3 représente la croissance de l'actinium *X* dans l'actinium primitivement pur et permet de calculer le nombre d'atomes de radioactinium et d'actinium *X* désintégrés par seconde au bout d'un temps donné.

L'étude de l'absorption dans différents écrans du rayonnement produit par des sources d'actinium *X* et de radioactinium d'intensité connue, placées dans les mêmes conditions expérimentales que les sources d'actinium permettra d'effectuer toutes les corrections désirées connaissant l'intensité de la source d'actinium et l'instant de la mesure.

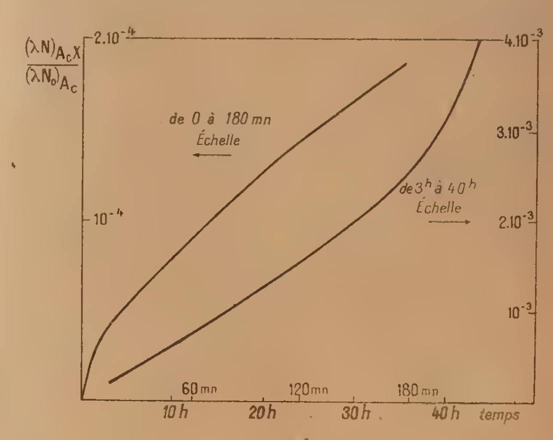


Fig. 3. — Courbe de croissance de l'actinium *X* dans l'actinium.

Nous avons suivi l'évolution de l'activité des sources d'actinium au travers de différents écrans, en utilisant le dispositif déjà décrit pour l'actinium *K*, (utilisation simultanée de deux compteurs, l'un à xénon, l'autre ordinaire avec radiateur de plomb). Avec le compteur à xénon on a suivi l'évolution de l'activité au travers de deux écrans de cuivre de 0,542 g : cm² etde 2,52 g : cm² laissant passer respectivement la raie de 48,6 keV et le groupe d'énergie voisine de 240 keV. Avec les compteurs

ordinaires nous avons utilisé les écrans de plomb de 1,53 et 4,4, g : cm², favorisant respectivement le groupe de 240 et de 400 keV.

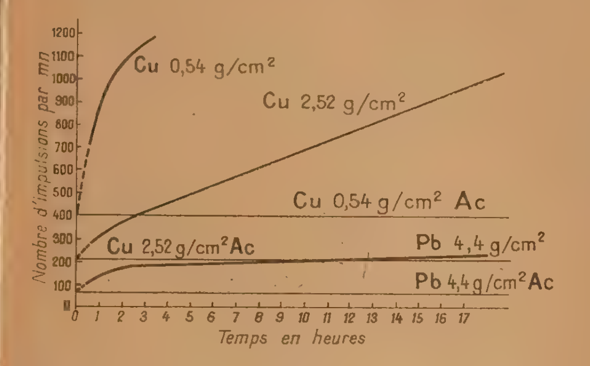


Fig. 4 — Évolution de l'activité γ d'une source d'actinium.

Nous donnons dans la figure 4 un exemple de ces courbes d'évolution pour les différents écrans. Les courbes en pointillé correspondent aux courbes expérimentales directes (en nombre d'impulsions minutes), les courbes en trait plein correspondent aux courbes corrigées de l'effet du à la présence d'actinium *X*, de radioactinium et d'actinium *K*.

Les courbes de Pb 1,53 g : cm² et Cu 2,52 g : cm² coïncident presque exactement, nous avons fait figurer une seule de ces courbes. On voit que l'activité corrigée reste approximativement constante au cours du temps. Deux hypothèses sont alors possibles, ou bien ces rayonnements appartiennent en propre à l'actinium, ou bien, la purification de l'actinium n'était pas complète et ce rayonnement est produit par des traces d'actinium *X* ou de radioactinium restant présent à la fin de la purification.

6. **Détermination des intensités absolues.** — Pour obtenir l'intensité des raies γ ou *L* de l'actinium et de l'actinium *K* nous devons déterminer l'efficacité des compteurs utilisés. Pour le compteur à xénon cette détermination a déjà été faite par l'un de nous [4]. Pour les compteurs à feuille d'or ou de plomb nous avons utilisé les courbes d'efficacité en fonction de l'énergie, obtenues par G. A. Renard [7].

D'autre part il faut tenir compte de l'absorption des rayons *L* dans la fenêtre d'entrée du compteur, la feuille de mica fermant la coupelle contenant la source et surtout dans la matière même de la source qui contient des éléments lourds comme le lanthane pour les sources d'actinium et le cérium pour celles d'actinium *K*. Pour tenir compte de ce dernier effet, il suffit de multiplier l'intensité observée par le facteur

$$\frac{\frac{\mu}{\rho}m}{1-e^{-\frac{\mu}{\rho}m}},$$

où μ est le coefficient d'absorption du rayonnement dans la matière constituant la source et m la masse superficielle de cette matière. Nous avons pu du reste obtenir une source d'actinium contenant moins de 0,1 mg : cm². de lanthane et plusieurs sources d'actinium *K* avec également peu de matière : les résultats sont en accord avec ceux obtenus avec des sources de quelques milligrammes par centimètre carré en faisant la correction ci-dessus.

La valeur des sources utilisées, en millicuries, a été déterminée pour celles d'actinium par le dosage en actinium *K*. La valeur des sources d'actinium *K* a été déterminée par une chambre d'ionisation β préalablement étalonnée.

Les moyennes des résultats obtenus avec diverses sources conduisent aux valeurs des intensités absolues des rayonnements *L* et γ de l'actinium et de l'actinium *K* qui sont reportées dans le tableau I; on a indiqué le compteur utilisé et son efficacité (les intensités sont exprimées en nombre de photons par 100 désintégrations).

Tableau I.

Intensité absolue des rayonnements L et γ de l'actinium et de l'actinium K.

Rayonnement.	Compteur.	Intensité.
	Actinium.	
Raies *L*	Xe (0,25)	$(5 \pm 1).10^{-2}$
36,8 ± 0,7 keV	Xe (0,14)	$(2,2 \pm 0,4).10^{-3}$
Rayonn. pénétrant (*)	Pb (0,014)	$(2 \pm 0,7).10^{-3}$
	Actinium K.	
Raies *L*	Xe (0,126)	$0,25 \pm 0,07$
48,6 ± 1,6 keV	Xe (0,070)	$0,27 \pm 0,05$
330 keV	Pb (0,014)	$0,06 \pm 0,03$

(*) Pour faire le calcul on a admis que ce rayonnement hypothétique avait une énergie moyenne de 300 keV.

L'intensité de la raie de 48,6 keV de l'actinium *K* déterminée avec Ac + Ac*K* est $(0,25 \pm 0,04).10^{-2}$ quanta par désintégration d'actinium, ce qui donne comme rapport d'embranchement pour la désintégration de l'actinium vers l'actinium *K* environ 0,009, en bon accord avec la valeur la plus précise de Mlle Perey : 0,011.

L'accord avec les résultats obtenus précédemment par M. Lecoin, Mlle Perey et Tsien San-Tsiang [2] est très bon pour la raie de 36,8 keV de l'actinium, puisque ces auteurs obtiennent une intensité de $(2,7 \pm 1).10^{-3}$ quanta par désintégration. Le désaccord pour la raie de 48,6 keV de l'actinium *K* s'explique par le fait que les auteurs précédents

attribuaient à cette raie une énergie trop élevée. Il est par contre difficile d'interpréter la divergence pour l'intensité des rayonnements L, les intensités données par les auteurs étant 5 à 7 fois plus élevées que les nôtres.

Ces résultats avaient été obtenus avec une chambre d'ionisation à xénon, le courant d'ionisation étant mesuré avec un électromètre Compton. La sensibilité d'un tel dispositif était environ 100 fois inférieure au dispositif à compteur précédemment décrit. Pour obtenir des courants mesurables il avait été nécessaire d'utiliser de très grands angles solides : l'élimination du rayonnement β pouvait dans ces conditions être incomplète. D'autre part la concentration en actinium des sources utilisées, était environ 100 fois plus faible que dans ces dernières expériences (80 mg de La_2O_3 par millicurie d'actinium au lieu de 2 mg : mC. Les corrections d'absorption du rayonnement L dans la matière du produit étaient considérables et ont pu facilement être surestimées.

7. Rayonnement β de l'actinium. — Nous avons repris l'étude de l'émission β de l'actinium par la méthode de la chambre de Wilson à basse pression. L'avantage de cette méthode est de permettre la détermination du nombre de rayons β par désintégration, le nombre de désintégrations étant déterminé par la numération des α de l'embranchement $Ac \xrightarrow{\alpha} AcK$; la mesure du parcours des rayons dans une chambre à basse pression permet d'établir avec une précision suffisante la répartition spectrale de ces rayons.

Rappelons rapidement les conditions nécessaires pour obtenir une détermination correcte : ces conditions ont été exposées dans le travail antérieur de deux d'entre nous; puisque l'évaluation du nombre de désintégrations repose sur le nombre d'α émis par l'actinium, il est nécessaire d'utiliser de l'actinium soigneusement purifié de ses dérivés (R Ac, Ac X, etc., la limite supérieure permise étant initialement au plus de 1/10 000e).

D'autre part, il faut tenir compte du fait que le temps d'efficacité de la chambre à pression réduite n'est pas le même pour les rayons α et pour les rayons β de faible énergie. On a levé cette indétermination en ne comptant que les rayons α présentant des rayons δ bien nets. Enfin si la durée d'utilisation des sources excède 3 h à compter de la fin des purifications il faut tenir compte de la formation du radioactinium de l'actinium X dans la source.

Dans cette nouvelle série de déterminations, nous avons essentiellement bénécifié de la nouvelle méthode de préparation de sources de La_2O_3 très riches en actinium : alors que la concentration de l'actinium dans La_2O_3 était de 1 mC pour 80 mg de La_2O_3 dans les expériences précédentes, nous avons utilisé couramment des préparations correspondant à 2 mg de La_2O_3 pour 1 mC d'actinium.

Nous avons pu ainsi préparer sur des feuilles d'aluminium de 0,5 mg : cm² des sources ne présentant aucune trace de matière visible : les quantités d'actinium à introduire dans la chambre étant inférieures à 10^{-3} mC, la masse de La_2O_3 correspondante est inférieure à 2.10^{-3} mg répartis sur une surface de 10 mm² environ; l'absorption à craindre est inférieure à 2.10^{-2} mg : cm² (0,1 mm d'air environ). D'autre part, la dimension réduite du support de source (2 mm × 5 mm) réduit la zone de perturbation qu'il apporte ; cette zone a des dimensions a peu près analogue à celle du support, et il est souvent difficile d'y voir les trajectoires.

La chambre de Wilson utilisée est la même que celle utilisée pour l'étude du spectre β du M Th_1; elle comporte un dispositif d'éclairage par décharge condensée dans le xénon. La pression initiale dans la chambre était suivant les séries de clichés de 25 ou de 15 cm.

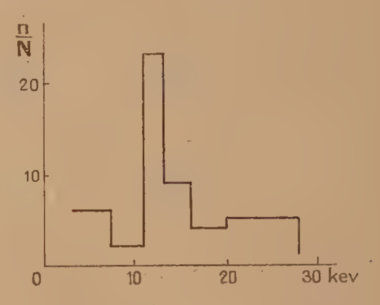


Fig. 5. — Spectre β de l'actinium.

Une quinzaine de séries de clichés ont été effectués; le nombre des rayons β observés pour 1 α présentant des rayons δ nets a varié suivant les séries de 8 à 17; cette variation n'est pas attribuable aux conditions initiales de pression; le spectre de vitesse est sensiblement le même pour les différentes séries de clichés. Il n'y a pas une proportion plus importante de rayons de faible énergie (< 10 keV) sur les séries de clichés effectués à 15 cm de pression). La variation du nombre de β suivant les séries semble plutôt devoir être imputée à des traces d'actinium K restant dans le produit d'actinium à la fin de la purification. Nous avons déjà eu l'occasion de signaler les difficultés de purification absolue dans des sources très concentrées en actinium.

La détermination du parcours et l'appréciation de l'énergie d'après le parcours a été effectuée de la même façon que pour M Th_1.

La figure 5 donne le spectre correspondant à l'ensemble des séries. A côté d'un maximum très accentué à 12 keV il semble exister une probabilité d'émission plus forte vers 6 et vers 25 keV.

8. **Discussion des résultats.** — Le rayonnement γ de 37 keV émis par Ac doit être fortement converti dans la couche *L* en donnant d'une part des électrons de conversion de 17 keV (L_1) et d'autre part un rayonnement *L*, dû au réarrangement du cortège après la conversion. En admettant que le rayonnement de 15 keV observé soit uniquement dû à la conversion dans la couche L_1, l'intensité des raies électroniques de conversion correspondantes devrait être de $\frac{5 \pm 1}{0,40}$, soit 0,12 ± 0,02 électrons par désintégration (le rendement de fluorescence dans la couche *L* étant de 0,40 pour le thorium). Ceci est en accord satisfaisant avec l'intensité obtenue par la méthode Wilson; il semble y avoir désaccord quand à la position des raies (12 keV au lieu de 17 calculé), malgré l'importance des erreurs expérimentales possibles dans l'évaluation de l'énergie des électrons par le parcours, cet écart paraît supérieur aux erreurs expérimentales.

D'autre part le rayonnement de 37 keV doit se convertir dans les niveaux *M* de l'atome. Le rapport des probabilités de conversion $\frac{L}{M}$ étant d'environ 10; les électrons de conversion *M* ont une énergie d'environ 30 keV. La partie du spectre β dont l'énergie est supérieure à 20 keV pourrait donc assez approximativement correspondre à ces électrons *M* de conversion. Il n'a pas été possible, nous l'avons précédemment exposé, d'étudier le spectre *X M* avec le compteur à xénon. Nous avons essayé de le mettre en évidence directement au moyen de la chambre de Wilson. On délimite un faisceau de rayons *X* ou γ émis par une source de 3 mC d'actinium, ce faisceau pénètre dans la chambre de Wilson à pression ordinaire au travers d'une fenêtre mince de nylon de 2 mg : cm. Avant de pénétrer dans la chambre le faisceau passe dans un champ magnétique suffisant pour éliminer le rayonnement β de l'actinium *K*. Le long du parcours du faisceau dans la chambre apparaissent des photo-électrons produits par l'absorption dans les niveaux de l'azote ou de l'oxygène des différents rayonnements *X* ou *L*. Sur 22 clichés le nombre de photo-électrons dont le parcours est supérieur à 1 cm est de 8 (∼ 22 keV), 62 ont des parcours compris entre 3 à 6 mm (12 et 17 keV) et 46 ont un parcours inférieur à 2 mm (6 à 9 keV). Les trajectoires de plus de 1 cm correspondent probablement à l'absorption des rayonnements *L* et γ de 37 et de 48 keV d'actinium et d'actinium *K*. Les trajectoires de 3 à 6 mm sont dues à l'absorption du rayonnement *L* d'actinium et d'actinium *K*. Pour les trajectoires de longueur inférieures à 2 mm la discrimination de l'origine est assez complexe. Il peut s'agir de photo-électrons dus à l'absorption du rayonnement *L* émis dans une direction perpendiculaire au plan lumineux éclairé ou de photo-électrons dus au rayonnement *M*, les conditions de l'expérience ne permettent pas de distinguer les deux catégories.

En effectuant le calcul du nombre de photons L_1 qui sont nécessaires pour produire les photo-électrons de 2 à 6 mm observés, en tenant compte du temps d'efficacité de la chambre, de l'angle solide du faisceau, et de l'absorption du rayonnement *L* dans la matière de la source, dans l'air avant la chambre et dans la feuille, on trouve un ordre de grandeur satisfaisant. Mais si l'on admet que seulement la moitié des électrons ayant un parcours inférieur à 2 mm sont réellement des photons *M*, en effectuant le même calcul on trouve que le nombre de photons *M* émis par la source devrait être égal au nombre de photons *L*.

La partie du spectre électronique ayant une énergie inférieure à 7 keV peut être expliquée par les électrons Auger dus aux transitions $M, N \rightarrow L$.

En résumé, il est donc possible d'expliquer la majeure partie du rayonnement *X* et du rayonnement β mis en évidence dans la désintégration de l'actinium par la conversion du rayonnement γ de 37 keV.

Compte tenu de cette conversion, la probabilité d'excitation nucléaire du niveau de 37 keV est environ 15 pour 100. Ce niveau est donc excité lors de la transition $\mathrm{Ac} \xrightarrow{\beta} \mathrm{RAc}$ puisque la transition $\mathrm{Ac} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ac}K$ ne représente que 1,1 pour 100 des désintégrations.

Dans 80 pour 100 des désintégrations il devrait aussi y avoir émission d'un spectre continu β dont la limite supérieure serait de 40 keV environ. Les expériences qui viennent d'être exposées montrent que pour 100 désintégrations, il y a au maximum 17 rayons β de plus de 3 keV émis, et que sur ces 17 électrons on peut en attribuer au moins 15 aux phénomènes de conversion du rayonnement γ de 37 keV dans les différents niveaux, ou à des phénomènes connexes (effet Auger). Dans ces conditions 2 pour 100 au maximum des rayons β représenteraient la partie du spectre continu comprise entre 3 et 40 keV et 95 pour 100 des électrons émis lors de la transition β directe $\mathrm{Ac} \rightarrow \mathrm{RAc}$ auraient une énergie inférieure à 3 keV.

9. **Conclusion.** — Les expériences antérieures et nos expériences conduisent aux conclusions suivantes :

Actinium K. — Le spectre β examiné antérieurement à la chambre de Wilson [9] a une énergie maximum de 1,2 ± 0,1 MeV; mais ces expériences n'ont pas permis de préciser le degré d'interdiction, la complexité du spectre étant néanmoins certaine [10].

L'observation d'un rayonnement γ de 330 keV de 6 photons par 100 désintégrations confirmerait que le spectre est complexe.

Quant au rayonnement γ de 49 keV, il est beaucoup

plus intense (0,27 photons par 100 désintégrations) et doit être très converti; comme le montre d'ailleurs l'observation d'un spectre L de 0,25 photons par désintégration. Si l'on admet que ce rayonnement L est dû uniquement à la conversion du rayonnement de 49 keV, le calcul à partir des intensités observées montre que la probabilité d'excitation du niveau nucléaire de 49 keV est voisine de 1. Il semble donc que le rayonnement de 49 keV soit émis en cascade avec le rayonnement β.

Actinium. — Dans la désintégration Ac → R Ac, on observe seulement un rayonnement L, un rayonnement γ de 37 keV et un spectre électronique qui semble attribuable à la conversion de ce rayonnement.

A partir des résultats obtenus pour les intensités, on calcule que la probabilité d'excitation du niveau nucléaire de 37 keV est environ 15 pour 100 (ce niveau est donc bien excité lors de la transition Ac $\xrightarrow{\beta}$ RAc, puisque la transition Ac $\xrightarrow{\alpha}$ AcK ne représente que 1,1 pour 100 des désintégrations).

L'énergie de la transition Ac $\xrightarrow{\beta}$ RdAc est donc au moins de 37 keV (²). Si l'on admet le chéma de désintégration représenté par la figure 6, dans 85 pour 100 des désintégrations, on devrait alors observer un spectre continu β dont la limite supérieure serait, *au moins* de 37 keV.

En calculant à partir des formules classiques la forme d'un spectre ayant une énergie maximum de 37 keV, [11] on trouve que 20 à 50 pour 100 des électrons nucléaires ont une énergie comprise entre 10 et 37 keV, or l'expérience montre que seulement quelques électrons par 100 désintégrations peuvent être attribués au spectre.

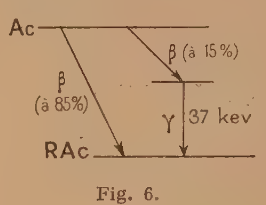


Fig. 6.

Nous n'avons pas pu conclure à l'existence d'un rayonnement γ de 300 keV environ émis par l'actinium, en tous cas son intensité est suffisamment faible (0,2 par 100 désintégrations) pour qu'on puisse l'attribuer à la transition Ac $\xrightarrow{\alpha}$ AcK.

Ce travail confirme l'analogie der désintégrations de Ac et MTh_1 [8], [12] : existence d'une raie γ fortement convertie dans 15 % des désintégrations. L'énergie de la transition β dans les 85 % qui restent, est donc au moins égale à l'énergie du quantung γ, néanmoins on n'a pu mettre en évidence expérimentalement de tels spectres β.

Ce travail a été effectué à l'Institut du Radium, Laboratoire Curie. Nous remercions I. Joliot-Curie, Directeur de ce laboratoire pour le bienveillant intérêt qu'elle nous a témoigné. Nous remercions également le Centre National de la Recherche Scientifique qui nous a permis à tous quatre de poursuivre ces recherches.

Manuscrit reçu le 20 décembre 1949.

(²) Ac $\xrightarrow{\alpha}$ AcA $\xrightarrow{\beta}$ AcX ; Ac $\xrightarrow{\beta}$ R Ac $\xrightarrow{\alpha}$ AcX. En faisant le bilan énergétique dans le cycle on trouve pour la transition Ac $\xrightarrow{\beta}$ RAc une énergie de 100 ± 100 keV.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Lecoin M. et Mlle Perey M. — *Cah. de Physique*, 1944, **20**, 58.

[2] Lecoin M., Mlle Perey M. et Tsien San-tsiang. — *Cah. de Physique*, 1944, **26**, 10.

[3] Mlle Perey M. —

[4] Riou M. — *J. Phys. Rad.*, 1950, **11**, 185.

[5] Mlle Perey M. et Lecoin M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1941, **212**, 893.

[6] Bachelet M. et Savel P. — *Cah. de Physique*, 1944, **19**, 52.

[7] Renard G. A. — *J. Phys. Radium*, 1948, **9**, 212.

[8] Lecoin M. Mlle Perey M. et Teillac. — *J. Phys. Rad.*, 1949, **10**, 34.

[9] Mlle Perey et M. Lecoin. — *J. Radium*, 1939, **7**, 439

[10] Lecoin M. — *Thèse*, p. 83.

[11] Mme Benoit. — Travail à paraître.

[12] Lecoin M., Mlle Perey M., et Riou M. — *J. de Phys. Rad.*, 1949, **10**, 390.

THÉORIE DES GAZ ET ÉQUATION D'ÉTAT. IX.

Par J. DUCLAUX.

Sommaire. — La théorie des gaz, fondée sur la notion d'association progressive, appliquée d'abord à l'oxygène, rend compte très exactement de sa compressibilité dans des limites très étendues. Elle a permis de découvrir une propriété nouvelle qui simplifie beaucoup l'étude de cette compressibilité. En même temps elle donne une interprétation de la liquéfaction et la relie à la compressibilité, le point de liquéfaction étant un point singulier de la courbe de compressibilité. De cette manière il suffit finalement d'une seule courbe pour représenter la compressibilité et la liquéfaction à toutes les températures.

1. Ce Mémoire est le premier d'une série destinée à développer les résultats contenus dans des Notes préliminaires [1]. Les calculs ont été refaits sur de meilleures bases, et l'accord entre la théorie et l'expérience a pu être poussé dans de nombreux cas jusqu'à la perfection, comme on va le voir.

Le but général du travail est de trouver une expression mathématique permettant de calculer à toute température la pression d'un gaz en fonction de son volume. C'est le problème que l'on cherche d'ordinaire à résoudre par l'équation d'état : la solution que j'apporte et qui est de beaucoup préférable, est de nature différente. Elle repose sur la notion d'association ou condensation progressive que je soutiens depuis 1924 [2].

Cette première partie est consacrée à l'oxygène. Les chiffres expérimentaux sont ceux de Kamerlingh Onnes [3].

Je donnerai immédiatement les résultats numériques : *in extenso*, pour la température de — 116°,01 choisie à titre d'exemple; en abrégé pour les autres.

TABLEAU I.

Comparaison du calcul et de l'expérience à — 116°.

Pression (atm.).	$\frac{PV}{RT}$ observé.	$\frac{PV}{RT}$ calculé.	Différence.
22,30...	0,4835	0,4839	+0,0004
27,85...	0,4560	0,4560	0,0000
32,65...	0,4297	0,4296	—0,0001
37,47...	0,4012	0,4007	—0,0005
43,95...	0,3541	0,3537	—0,0004
50,47...	0,2826	0,2831	+0,0005
52,44...	0,2477	0,2476	—0,0001

La comparaison est aussi satisfaisante que possible. Les écarts ne montrent pas de marche systématique et leur valeur moyenne est 0,0003. Ce chiffre est d'ailleurs un maximum, car la méthode de calcul entraîne des erreurs pouvant atteindre 0,0002.

Pour les réduire il faudrait se servir de Tables de logarithmes à 6 décimales au lieu de 5; les calculs étant déjà très longs, j'ai pensé que cette complication était inutile, puisque les écarts ne sont pas supérieurs aux erreurs expérimentales.

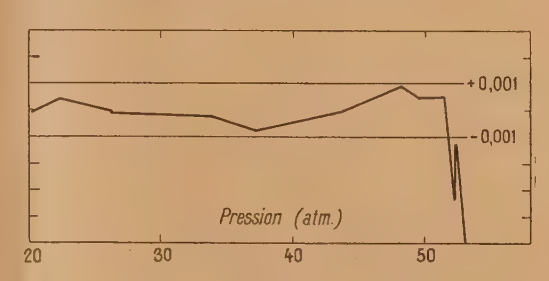


Fig. 1. — Oxygène à — 116°,99.

Valeurs de $\frac{pv}{RT}$; écarts entre la théorie et l'expérience.

A toutes les températures supérieures la concordance est du même ordre :

	Mesures.	Écart moyen.
A + 20°........	6	0,0002
0.........	9	0,0002
— 40,05.....	7	0,0004
— 80,03.....	9	0,0003
—102,46.....	8	0,0005
—109,97.....	10	0,0007
—113,97.....	9	0,0003

Trois écarts seulement sont supérieurs à 0,001, sur un total de 58. Leur variation n'est jamais systématique.

Mais à la température la plus basse (—116°,99, très près du point critique —118°,8) des écarts plus forts apparaissent aux fortes pressions. Ils sont donnés par la figure 1. Jusqu'à 51 atm ils restent comparables aux erreurs d'expérience, mais au-dessus ils augmentent. L'irrégularité des chiffres expérimentaux ne permet pas de donner de chiffres précis, mais il semble que l'écart maximum sous la pression la plus élevée soit 0,005 environ. Celui que donne la formule de van der Waals est 0,232, soit 46 fois plus grand. Nous allons voir que la méthode par laquelle nous obtenons ce résultat beaucoup plus favorable est très simple.

2. **Bases du calcul.** — Comme il s'agit ici d'un mode de calcul nouveau, je serai obligé de l'exposer en détail.

Les principes ont été exposés antérieurement [4]. Nous négligeons les actions à distance de la théorie de van der Waals. Nous admettons que dans les gaz réels une certaine fraction des molécules sont associées, fraction d'autant plus grande que la pression est plus forte ou la température plus basse. Nous admettons de plus que l'association est progressive, c'est-à-dire que les groupes de 2 molécules formés par la *première association* peuvent former des groupes plus nombreux de 3, 4, 5, ... molécules, sans limite supérieure. Mais si nous voulions tenir compte de tous ces groupes nous serions conduits à des calculs inextricables. Pour simplifier, nous admettrons que l'association se fait en progression géométrique, c'est-à-dire que nous n'avons à considérer que les groupes de 1, 2, 4, 8, 16, ..., et en général 2^n molécules. Pour simplifier l'écriture nous désignerons par M_n les groupes de 2^n molécules simples, et par C_n leur concentration dans les unités qui seront définies tout à l'heure.

Nous admettrons que, entre C_n et C_{n+1} existe une relation de la même forme que celle qui exprime la loi d'action de masses

$$C_n^2 = K_n C_{n+1}. \qquad (1)$$

Cette relation permet de calculer de proche en proche toutes les valeurs des C connaissant celles des K_n.

Nous ne savons pas *a priori* comment ces valeurs dépendent de la valeur de n. J'ai déjà indiqué [4] les raisons de croire à une variation régulière de K_n en fonction de n. L'hypothèse la plus simple est qu'il y a entre deux coefficients successifs la relation

$$K_{n+1} = p K_n, \qquad (2)$$

le nombre p étant pour chaque gaz une constante indépendante de n et indépendante aussi de la température. Toutes ces hypothèses ont pour but d'introduire le plus petit nombre possible de paramètres.

3. **Variation du coefficient K_0 avec le volume.** — Le coefficient K_0 est d'après nos définitions celui qui correspond à la *première association* (deux molécules simples se réunissant en une double). Toutes les concentrations C_n se déduisant comme nous l'avons vu des valeurs des K_n, et celles-ci se déduisant de K_0 par l'intermédiaire de la constante p que nous venons de définir, tout se ramène finalement à la valeur de K_0.

La formule (1) a la même forme que celle de la loi d'action de masses. Dans les applications que l'on fait de cette loi on admet toujours que la valeur de la constante K est indépendante du volume, c'est-à-dire qu'elle conserve la même valeur si le volume du système est changé. C'est alors une véritable constante, pouvant entrer comme telle dans les calculs thermodynamiques. C'est l'hypothèse que j'avais faite au début, ayant constaté qu'elle était suffisante pour de faibles pressions. Mais il est impossible de la conserver pour des pressions élevées et des températures basses, car elle ne peut rendre compte de la liquéfaction.

Il est nécessaire alors [si du moins l'on veut conserver la formule (1)] d'admettre que le coefficient K_0 est d'autant plus petit que le volume du gaz est plus petit; c'est-à-dire que si nous prenons une quantité donnée de gaz, une molécule-gramme par exemple, le coefficient K_0 dépendra du volume occupé par cette masse de gaz ou de sa densité. Ne sachant pas *a priori* de quelle manière il en dépend, nous ferons une fois de plus l'hypothèse la plus simple, et qui rend les calculs les plus faciles.

Nous admettrons que pour une masse donnée de gaz, le coefficient K_0 est proportionnel à une puissance m du volume occupé par cette masse. Si nous désignons par $K_{n,v}$ le coefficient qui fixe l'équilibre, dans le volume v, des assemblages de 2^n et de ceux de 2^{n+1} molécules simples, nous aurons ainsi

$$K_{n,v} = K_{0,1}\, v^m p^n,$$

soit

$$\log K_{n,v} = \log K_{0,1} + m \log v + n \log p. \qquad (3)$$

Je répète pour éviter toute confusion que $K_{0,1}$ et m dépendent de la température tandis que p est indépendant de la température et du volume.

Les hypothèses faites peuvent sembler très étranges et difficiles à justifier. Je ne me suis pas arrêté à cette objection. Il est certain que tout ce qui précède peut paraître compliqué et difficile à assimiler; tout point de vue nouveau apporte un inconvénient de ce genre. D'ailleurs tout l'essentiel de la méthode tient dans la formule (3), qui est très simple et d'application facile, bien qu'elle conduise à des calculs fort longs.

4. **Covolume et gaz fictif.** — Le calcul numérique montre qu'il est nécessaire de conserver la notion de covolume; cette question sera discutée

quand nous examinerons les propriétés de l'azote. Nous emploierons cette notion sous une forme différente de la forme ordinaire en faisant intervenir ce que nous appellerons le *gaz fictif*. C'est un gaz auquel nous supposerons toutes les propriétés du gaz réel, mais dont le covolume est nul. Les coefficients K, m, p du gaz fictif sont identiques à ceux du gaz réel, sous des volumes correspondants. Par exemple, pour un volume du gaz réel égal à 1, si le covolume est 0,002, les coefficients K, m, p sont identiques à ceux du gaz fictif sous le volume 0,998. La pression est aussi la même; tout se passe comme si le volume des molécules s'évanouissait sans que les propriétés élastiques changent. Tous les calculs se font sur le gaz fictif : à la fin on ajoute le covolume pour passer au gaz réel.

Nous continuerons à représenter le covolume par la lettre b et le considérerons comme indépendant de la pression et de la température.

5. **Exemple de calcul.** — En l'absence de tout guide théorique les valeurs de K_0, m, p et b ne peuvent s'obtenir que par approximations successives. Cette nécessité conduit à de longs calculs et a retardé de près d'une dizaine d'années la parution du présent Mémoire. Il est nécessaire de dresser des Tables numériques dont on trouvera un abrégé plus loin. Mais une fois que ces Tables sont calculées, le travail devient très simple.

Soit l'oxygène à la température de $-116^{\circ},01$ et sous la pression de 43,947 atm. Nous prenons les unités Amagat; le volume 1 est celui du gaz sous la pression de 1 atm à 0°. Alors l'expérience donne pour pv le nombre 0,35408 d'où l'on déduit pour v la valeur 0,008057. Pour le calcul théorique nous partirons de cette valeur de v pour en déduire celle de p.

Après quelques tentatives, il a été reconnu que la valeur la plus convenable du covolume était 0,0021. Le volume du gaz fictif défini plus haut est donc

$$0{,}008057 - 0{,}0021 = 0{,}005957.$$

Il a été reconnu aussi que les valeurs les plus favorables des constantes étaient

$$\log K_{0,1} = 2{,}63524, \qquad m = 0{,}39226, \qquad p = 0{,}8072.$$

Pour avoir une unité de concentration nous admettrons que la concentration des molécules simples dans le volume 1 serait égale à l'unité, si tous les assemblages étaient détruits.

La valeur de la constante de première association $K_{0,v}$ sous le volume du gaz fictif est donnée d'après la formule (3) par la relation

$$\log K_{0,v} = 2{,}63524 + 0{,}39226 \log 0{,}005957 = 1{,}76247.$$

Nous calculons alors de proche en proche

$$\begin{array}{ll} \log K_0 = 1{,}76247, & C_0 = 36{,}85; \\ \log K_1 = 1{,}66947, & C_1 = 23{,}47; \\ \log K_2 = 1{,}57647, & C_2 = 11{,}79; \\ \log K_3 = 1{,}48347, & C_3 = \ \ 3{,}69; \\ \log K_4 = 1{,}39047, & C_4 = \ \ 0{,}45; \\ & C_5 = \ \ 0{,}008. \end{array}$$

La valeur de C_0 doit être telle que la concentration des molécules simples soit égale à $\frac{1}{v}$ en supposant tous les assemblages détruits, c'est-à-dire que l'on ait

$$C_0 + 2C_1 + 4C_2 + 8C_3 + 16C_4 + \ldots = \frac{1}{v} = 167{,}87.$$

Pour le calcul de $\frac{pv}{RT}$ il faut tenir compte de ce que chaque assemblage, quelle que soit sa complexité, forme une unité cinétique unique. Le nombre total des unités cinétiques est donc

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots = 76{,}25$$

et la valeur de $\frac{pv}{RT}$ est $\frac{76{,}25}{167{,}87} = 0{,}4542$, d'où

$$p = \frac{0{,}4542}{0{,}005957} \, \frac{273{,}15 - 116{,}01}{273{,}15} = 43{,}88 \text{ atm},$$

au lieu du chiffre expérimental 43,95.

6. **Courbe de condensation.** — Ce mode de calcul est complètement différent des modes usuels qui reposent sur l'emploi d'une équation d'état. Celle-ci est supprimée. Les valeurs de $\frac{pv}{RT}$ sont données par le quotient de deux séries dont chaque terme correspond à un certain degré de condensation. La notion de pression interne ne correspond plus à rien. Nous verrons plus tard qu'il n'y a plus en général d'états strictement correspondants, et que l'importance attachée à la température critique est exagérée. Tout ceci peut paraître assez choquant, mais là encore je ne me suis pas arrêté à ces objections.

Dans le système van der Waals, on est naturellement conduit, si l'on veut tracer une courbe de compressibilité, à prendre comme abscisses les volumes et comme ordonnées les pressions. Nous sommes conduits ici à employer un tout autre système qui a permis de découvrir une propriété intéressante des gaz, restée inaperçue jusqu'ici. Nous prendrons comme abscisse le logarithme du volume du gaz fictif (volume que nous désignerons désormais par v_f) et comme ordonnée la valeur de $\frac{pv_f}{RT}$. Ce choix est dicté par la nature des calculs. Nous obtiendrons ainsi une courbe en forme de S avec deux asymptotes, l'une à l'ordonnée 1 pour les très grands volumes, l'autre à l'ordonnée zéro

pour les très petits. Quelques-unes de ces courbes sont reproduites sur la figure 2. Elles ont toutes

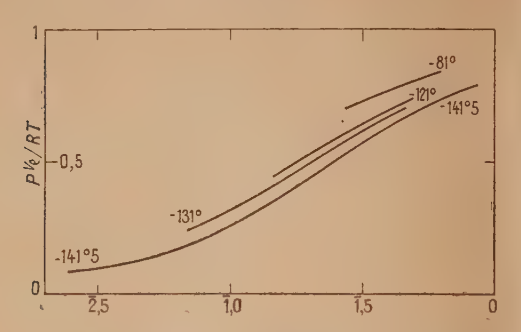


Fig. 2. — Courbes de condensation expérimentales à diverses températures.

la même forme générale et leur pente est d'autant plus forte que la température est plus basse. Pour un gaz parfait elles se réduisent à une droite horizontale d'ordonnée égale à l'unité.

7. **Relation nouvelle.** — Ces courbes se déduisent les unes des autres par une relation remarquable qui apporte une grande simplification dans l'étude de la compressibilité des gaz. Elle se transforment l'une dans l'autre par une translation horizontale et une dilatation horizontale. A deux températures T_1 et T_2 la même ordonnée y correspond à deux valeurs x_1 et x_2 de l'abscisse entre lesquelles on a la relation

$$x_2 = A x_1 + B,$$

A et B étant deux constantes indépendantes de la pression. Si donc une courbe est complètement tracée pour une certaine température T_1, il suffit de déterminer deux points à toute autre température T_2 pour calculer les constantes A et B et en déduire le tracé complet de la courbe T_2. En ce sens on peut dire qu'il y a pour un gaz une *courbe de condensation* unique, indépendante de la température. Mais cette courbe diffère d'un gaz à l'autre.

L'exactitude de cette loi est parfaite. Dans tout le domaine étudié par Kamerlingh Onnes (+ 20° à — 117° et 20 à 60 atm), les écarts avec l'expérience sont inférieurs aux erreurs expérimentales.

Nous sommes ainsi très loin des formules du genre van der Waals. Cette loi remarquable ne pouvait en être déduite.

Il en résulte que la compressibilité de l'oxygène peut être représentée par une courbe (ou une Table) unique. J'ai calculé cette Table pour toutes les valeurs de ($\log v_f$) comprises entre — 2 et — 4,1 par intervalles de 0,01. Dans cette Table l'unité de volume est arbitraire. Il suffit de connaître pour chaque température la dilatation horizontale et la translation définies plus haut et qui sont représentées par les nombres suivants :

	Dilatation.	Translation.
+ 20° ……	1,1157	0,9795
0 ……	1,1111	1,0018
— 40,05 ……	1,1020	1,0643
— 80,03 ……	1,0670	1,0800
—102,46 ……	1,0252	1,0410
—109,97 ……	1,0050	1,0140
—113,97 ……	0,9881	0,9827
—116,01 ……	0,9840	0,9803
—116,99 ……	0,9821	0,9794

Je donne un extrait de la *Table de condensation.*

Table de condensation de l'oxygène.

$\left(\text{Valeurs de } \frac{pv_f}{RT} \text{ en fonction de } \log v_f.\right)$

$\log v_f$.	$\frac{pv_f}{RT}$.	$\log v_f$.	$\frac{pv_f}{RT}$.	$\log v_f$.	$\frac{pv_f}{RT}$.
$\bar{2}$,0…	0,9542	$\bar{3}$,3…	0,7734	$\bar{4}$,6…	0,3629
$\bar{3}$,9…	0,9405	$\bar{3}$,2…	0,7271	$\bar{4}$,5…	0,3030
$\bar{3}$,8…	0,9235	$\bar{3}$,1…	0,6751	$\bar{4}$,4…	0,2486
$\bar{3}$,7…	0,9028	$\bar{3}$,0…	0,6177	$\bar{4}$,3…	0,2003
$\bar{3}$,6…	0,8781	$\bar{4}$,9…	0,5561	$\bar{4}$,2…	0,1592
$\bar{3}$,5…	0,8485	$\bar{4}$,8…	0,4917	$\bar{4}$,1…	0,1248
$\bar{3}$,4…	0,8138	$\bar{4}$,7…	0,4265	$\bar{4}$,0…	0,0968

8. **Emploi de la Table.** — Soit la température de — 80°,03 avec le volume réel 0,018584, Le covolume étant 0,0021, le volume v_f du gaz fictif est

$$v_f = 0{,}018584 - 0{,}0021 = 0{,}016484$$

dont le logarithme est $\bar{2}$,21706 ou — 1,78294. De ce chiffre il faut retrancher le facteur de translation donné plus haut (1,0800), ce qui donne — 2,86294. En divisant par le facteur de dilatation, 1,0670, nous obtenons — 2,6832 qui est la valeur de ($\log v_f$) à prendre dans la Table. Nous voyons en face 0,7806 pour la valeur de $\frac{pv}{RT}$, ce qui donne pour pv_f, 0,5524. En divisant par la valeur 0,016484 de v_f nous obtenons finalement une pression de 33,51 atm. Le chiffre expérimental est 33,475. Tous les autres chiffres de Kamerlingh Onnes ont été traités de la même manière et les résultats ont été donnés en tête de ce Mémoire. Par le moyen de la Table les calculs sont extrêmement simples, beaucoup plus que par la formule de van der Waals pour laquelle il est impossible de se servir d'une Table unique. Il en faudrait une pour chaque température. La simplification est donc considérable.

9. **Variation des facteurs avec la température.** — Seuls dépendent de la température les facteurs K_0 (constante de première association) et m (coefficient indiquant l'influence de la température sur la condensation).

Pour des raisons qui seront données plus tard, il est préférable d'établir la variation des coefficients K_0 non pas sur les valeurs qui correspondent à la densité sous la pression atmosphérique, mais sur celles qui correspondent à une densité 100 fois plus grande (ou à un volume 0,01). Soient K' ces coefficients; nous trouvons qu'ils se déduisent d'une loi très simple

$$\log K' = 2{,}9082 - \frac{166{,}2}{T}. \qquad (4)$$

La correspondance des nombres donnés par cette formule avec les nombres expérimentaux est remarquablement exacte :

	Observé.	Calculé.	Différence.
+ 20°.....	2,341	2,341	0
0......	2,299	2,299	0
— 40......	2,191	2,195	+0,004
— 80......	2,045	2,047	+0,002
—102......	1,936	1,934	—0,002
—110......	1,891	1,889	—0,002
—113,94...	1,865	1,864	—0,001
—116,01...	1,851	1,850	—0,001
—116,99...	1,844	1,844	0

Si l'on interprète à la manière ordinaire la formule (4), elle signifie que la chaleur d'association est constante et égale à 760 calories. La constance serait une vérification de la théorie, car on pouvait l'admettre *a priori*. Mais il faudrait examiner si cette interprétation est encore possible ici, le coefficient K n'étant pas une véritable constante puisqu'il dépend de la densité. Ce point ne peut être discuté ici. En tout cas l'exactitude de la formule permet l'extrapolation vers les basses températures.

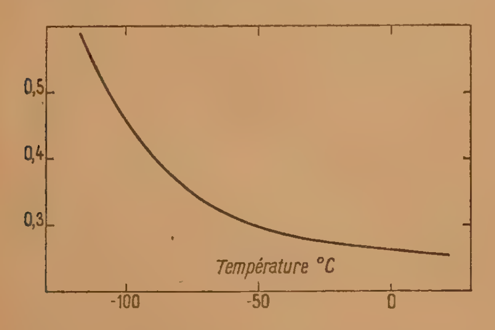


Fig. 3. — Oxygène.
Variation avec la température du coefficient m.

Pour ce qui concerne le coefficient m les difficultés sont beaucoup plus grandes. Ses variations au voisinage de la température critique sont très rapides (*fig.* 3). Elles sont assez bien représentées par une formule du type

$$\log m = A - \frac{B}{T^4},$$

mais à peu près aussi bien par une formule en T^3. Pour choisir entre ces deux formules, et beaucoup d'autres, il faudrait un guide théorique. Elles donnent par extrapolation des chiffres très différents; par exemple, à 130° absolus, 0,7701 (T^4) et 0,6646 (T^3). Il en résulte que l'extrapolation vers les basses températures est fort incertaine, dès qu'on s'écarte de plus de quelques degrés de la température critique.

10. **Liquéfaction.** — La théorie conduit à se représenter de la manière suivante le phénomène de la liquéfaction.

Quand le volume diminue, l'association progresse et la valeur de $\frac{pv_f}{RT}$, diminue comme le montrent les courbes de la figure 2. Dans le calcul de ces courbes la pression n'intervient en rien; elle s'en déduit seulement par l'identité

$$p = \frac{pv_f}{RT}\,\frac{RT}{v_f}, \qquad (5)$$

dont tous les éléments sont connus. Si l'on fait le calcul on s'aperçoit que lorsque le volume diminue la pression, ainsi calculée, n'augmente pas indéfiniment : elle passe par un maximum pour décroître ensuite, si la température est assez basse.

C'est la position de ce maximum qui est le point de liquéfaction. En effet, au delà le système est instable : toute nouvelle diminution de volume amenant une diminution de pression, la condensation doit devenir totale sous pression constante.

La position du maximum de pression sur la courbe de condensation est d'ailleurs facile à déterminer : en ce point la pression passe par un maximum ($dp = 0$). On a donc, d'après la relation (5),

$$\frac{RT}{v_f}\,d\,\frac{pv_f}{RT} + \frac{pv_f}{RT}\,d\,\frac{RT}{v_f} = 0,$$

ce qui se réduit à

$$d\log\frac{pv_f}{RT} = d\log v_f.$$

L'abscisse x des courbes étant ($\log v_f$), tandis que l'ordonnée y est $\frac{pv_f}{RT}$, cette relation peut s'écrire

$$d\log y = dx. \qquad (6)$$

Il suffit donc de construire la courbe ($\log y$, x) et de prendre le point auquel la tangente à cette courbe est inclinée à 45°.

De cette manière la courbe de condensation est en même temps la courbe de liquéfaction. C'est là un avantage très considérable sur les formules du type van der Waals qui ne permettent aucune prévision de ce genre.

Cet avantage doit bien entendu être contrôlé par l'expérience. Les mesures de Kamerlingh Onnes ne permettent pas de le faire directement, étant

toutes relatives à des températures supérieures au point critique. Mais nous pouvons essayer de les extrapoler vers les basses températures et nous obtenons alors :

Température (°K).	Pression (atm) calculée.	Pression (atm) observée.
150.....	44	44
140.....	33	29
130.....	25	17

La concordance est très bonne à 150°. Au delà les différences augmentent très vite, mais elles sont attribuables à l'incertitude de l'extrapolation. Les calculs ont été faits avec la formule d'extrapolation en T^4 et la valeur calculée de m est 0,770, plus du double du dernier chiffre expérimental. La vérification de la théorie est aussi bonne qu'on pouvait l'espérer. Le principe apparaît comme parfaitement sain.

11. Résumé. — Les idées qui nous ont servi de guide au long de cet exposé étant très différentes de celles qui ont cours actuellement je résume ici la marche suivie et les résultats obtenus.

1° La théorie que je propose vise à remplacer complètement toutes celles qui sont fondées sur le principe de van der Waals. Elle repose sur l'idée de la condensation progressive.

2° Nous désignons par C_n la concentration des assemblages de 2^n molécules simples, l'unité de concentration étant celle des molécules simples dans le gaz à l'état normal, supposé complètement dissocié sous le même volume.

3° Toute la théorie tient dans les formules suivantes :

$$C_n^2 = K_{n,v} C_{n+1},$$

$$\log K_{n,v} = \log K_{0,1} + m \log v + n \log p,$$

$$\log K_{0,-0,01} = 2{,}9082 - \frac{166{,}2}{T},$$

qui permettent de calculer de proche en proche les concentrations C et de définir ainsi complètement l'état de condensation du gaz. Le paramètre p est une constante caractéristique du gaz. Le paramètre m dépend de la température suivant une loi qui n'a pu être établie. Finalement l'état du gaz *à toute température* dépend de quatre constantes fixes et d'un paramètre variable.

4° Par le moyen de ces relations la compressibilité de l'oxygène est représentée avec la plus complète exactitude entre + 20° et — 117°, sauf dans un domaine très petit au voisinage immédiat du point critique. L'écart ne dépasse pas 2 pour 100 de celui que donne la formule de van der Waals.

5° La théorie a permis de reconnaître une nouvelle propriété des gaz qui simplifie beaucoup l'étude de la compressibilité, puisqu'on peut la déduire d'une Table unique valable pour toutes les températures.

6° La courbe correspondant à cette Table est la *courbe de condensation*. Elle porte un point singulier qui est celui auquel le gaz se liquéfie. Ainsi une Table unique reproduit à la fois la compressibilité et la liquéfaction. Si la variation du paramètre m avec la température était connue, il suffirait d'une seule courbe de compressibilité à une seule température pour connaître la compressibilité et la liquéfaction à toute température.

12. Pour alléger ce Mémoire, j'ai dû laisser de côté un certain nombre de points relativement accessoires. Ils seront discutés dans une deuxième Partie relative à l'azote. Chaque gaz doit être traité isolément, car chacun a sa propre loi de compressibilité. Les courbes de condensation qui conviennent à l'oxygène ne conviennent pas à l'azote, et l'état de ces deux gaz au point critique n'est pas le même. Il n'y a pas entre eux d'états strictement correspondants.

J'indiquerai immédiatement que la loi de variation des constantes d'association K avec le volume ou la densité, qui a été adoptée dans ce Mémoire, *n'est pas définitive*. Mais pour établir la loi véritable, de très longs calculs seront encore nécessaires. De plus, la nouvelle loi devra sur un intervalle étendu se confondre avec l'ancienne, de telle sorte qu'il n'y aura presque rien de changé aux résultats qui ont été donnés ici.

Enfin, on pourra dire que les molécules associées, sur l'existence desquelles la théorie repose, n'existent pas dans la réalité. Je pense qu'elles existent réellement, mais la question n'a pas grande importance. Même s'il ne s'agit que d'une nouvelle méthode de calcul, ses avantages sont tels qu'elle devra être substituée aux anciennes, fondées sur des idées dérivées de celles de van der Waals.

Manuscrit reçu le 13 février 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **226**, 1113; 1948, **226**, 2034; 1948, **227**, 1124.

[2] *J. Physique Rad.*, 1924, **5**, 331; 1927, **8**, 336; 1940, **1**, 293.

[3] Kamerlingh Onnes et Kuypers. — *Comm. Leiden*, 1923-1924.

[4] *J. Physique Rad.*, 1947, **8**, 94.

REMARQUES SUR LE CALCUL DE LA PRESSION THERMODYNAMIQUE EN STATISTIQUE QUANTIQUE

Par J. HOROWITZ.
Fort de Châtillon, Fontenay-aux-Roses.

Sommaire. — Différents calculs quantiques de la pression thermodynamique ont été présentés récemment pour démontrer que celle-ci est ou n'est pas égale à la pression cinétique. La question a été reprise ici. Nous concluons à l'égalité des deux pressions et analysons l'origine de certaines inexactitudes.

Considérons N particules identiques dans un volume V. Nous supposons que ces particules n'ont pas de degrés de liberté internes. Le potentiel d'interaction est $\varphi(r_{ij})$ et il n'est pas nécessaire pour la suite de préciser à quelle statistique ces particules obéissent. L'équilibre étant réalisé à la température T, la pression thermodynamique p est donnée par la relation

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{kT}{Z}\frac{\partial Z}{\partial V}. \tag{1}$$

F est l'énergie libre, Z la somme d'état définie par

$$Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}, \tag{2}$$

la sommation étant étendue sur tous les états propres de l'énergie. Les dérivées partielles sont prises à température constante.

Si les particules étaient libres de se mouvoir dans tout l'espace nous pourrions, sans précisions supplémentaires, écrire l'hamiltonien $\mathcal{H}$ sous la forme

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{1}{2m}\mathbf{p}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{jk}\varphi(r_{jk}). \tag{3}$$

Nous devons cependant décrire le rôle des parois limitant le volume V. Pour cela, nous pourrions introduire un mur de potentiel de grande hauteur mais qui aurait l'inconvénient de laisser déborder les fonctions d'onde en dehors du volume V et de donner pour de grandes énergies un spectre continu. Il vaut mieux limiter les fonctions d'onde au volume V : il devient alors indispensable d'introduire des conditions aux limites. Nous imposons aux fonctions d'onde d'être nulles sur la surface limitant le volume V, cette condition se déduisant assez naturellement de la considération d'un mur de potentiel dont la hauteur tend vers l'infini. D'autres conditions sont mathématiquement possibles. D'ailleurs le raisonnement qui va suivre et, par suite, la formule finale, sont dans une large mesure indépendants de ce choix.

Les conditions aux limites assurent l'hermiticité de l'hamiltonien $\mathcal{H}$ et précisent son domaine de définition, ses fonctions et valeurs propres. A deux systèmes de conditions aux limites différents correspondent, en général, des opérateurs totalement différents [1].

Modifions maintenant légèrement le volume V. Pour simplifier, nous allons lui faire subir une homothétie et nous ramener au volume primitif par le changement de variables

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{1+\varepsilon}.$$

Nous avons ainsi à considérer dans le même volume V, avec les mêmes conditions aux limites (nullité sur la surface), les hamiltoniens dépendant du paramètre ε :

$$\mathcal{H}(\varepsilon) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\frac{1}{2m}\sum_i \mathbf{p}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{jk}\varphi[r_{jk}(1+\varepsilon)]. \tag{4}$$

et les sommes d'état

$$Z(\varepsilon) = \sum_n e^{-\frac{E_n(\varepsilon)}{kT}}. \tag{5}$$

Pour obtenir l'expression de la pression p nous devons calculer

$$\frac{\partial Z(0)}{\partial V} = \frac{1}{3V}\frac{\partial Z(0)}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{3VkT}\sum_n \frac{\partial E_n(0)}{\partial \varepsilon} e^{-\frac{E_n(0)}{kT}} \;[2]. \tag{6}$$

$\frac{\partial E_n(0)}{\partial \varepsilon}$ s'obtient par la méthode de perturbation

[1] *Voir* par exemple J. VON NEUMAN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, p. 79.

[2] Nous écrirons $\frac{\partial Z(0)}{\partial \varepsilon}$ pour $\left.\frac{\partial Z(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.

habituelle

$$\frac{\partial E_n(0)}{\partial\varepsilon} = \left\langle n \left| \frac{\partial \mathcal{H}(0)}{\partial\varepsilon} \right| n \right\rangle$$
$$= -2 \left\langle n \left| \frac{1}{2m} \sum_i \mathbf{p}_i^2 - \frac{1}{4} \sum_{jk} r_{jk} \frac{\partial\varphi(r_{jk})}{\partial r_{jk}} \right| n \right\rangle, \quad (7)$$

où $|n>$ représente le $n^{\text{ième}}$ état propre de l'hamiltonien $\mathcal{H}(0)$. De (1), (6) et (7) on déduit

$$pV = \frac{2}{3} \frac{1}{Z} \sum_n \left\langle n \left| \frac{1}{2m} \sum_i \mathbf{p}_i^2 - \frac{1}{4} \sum_{jk} r_{jk} \frac{\partial\varphi(r_{jk})}{\partial r_{jk}} \right| n \right\rangle e^{-\frac{E_n(0)}{kT}}$$
$$= \frac{2}{3} \overline{\frac{1}{2m} \sum_i \mathbf{p}_i^2} - \frac{1}{6} \overline{\sum_{jk} r_{jk} \frac{\partial\varphi(r_{jk})}{\partial r_{jk}}}, \quad (8)$$

où la barre indique la moyenne sur l'ensemble canonique. La relation (8) exprime l'égalité des pressions thermodynamique et cinétique. Le mode de raisonnement ci-dessus a déjà été publié ([3]).

Born et Green conduisent les calculs autrement ([4]) et concluent à l'inégalité des pressions thermodynamique et cinétique, la différence devant surtout être sensible à basse température. De Boer ([5]) établit la relation (8), mais son calcul renferme des imprécisions analogues à celles qui conduisent au résultat inexact de Green. Examinons maintenant ce qui est à critiquer dans ces démonstrations.

Nous avons déjà insisté sur le point suivant : c'est seulement après introduction des conditions aux limites que les hamiltoniens $\mathcal{H}_V(\varepsilon)$ (relatifs au volume V) se trouvent définis à partir des opérateurs $\mathcal{H}_\infty(\varepsilon)$ (applicables à tout l'espace). La multiplicité des fonctions d'onde pour lesquelles les $\mathcal{H}_V(\varepsilon)$ sont définis est plus restreinte que le domaine de définition des $\mathcal{H}_\infty(\varepsilon)$. Il en résulte que certaines égalités entre opérateurs cessent d'être vraies et que certains opérateurs construits au moyen des $\mathcal{H}_\infty(\varepsilon)$ cessent d'avoir un sens quand $\mathcal{H}_\infty(\varepsilon)$ est remplacé par $\mathcal{H}_V(\varepsilon)$. De Boer et Green ([6]) écrivent

$$Z(\varepsilon) = \text{trace}\, e^{-\frac{\mathcal{H}(\varepsilon)}{kT}},$$
$$\frac{\partial Z(0)}{\partial V} = \frac{1}{3V} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \text{trace}\, e^{-\frac{\mathcal{H}(0)}{kT}}$$
$$= \frac{1}{3V} \text{trace} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} e^{-\frac{\mathcal{H}(0)}{kT}},$$
$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} e^{-\frac{\mathcal{H}(0)}{kT}} = \left\{ -\frac{1}{kT} \frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial\varepsilon} + \frac{1}{(kT)^2} \left[\mathcal{H}(0), \frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial\varepsilon}\right] - \frac{1}{2!} \frac{1}{(kT)^3} \times \left[\mathcal{H}(0), \left[\mathcal{H}(0), \frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial\varepsilon}\right]\right] + \dots \right\} e^{-\frac{\mathcal{H}(0)}{kT}}$$

sans se préoccuper de savoir si les opérations précédentes et ce développement ont un sens.

De Boer affirme que les commutateurs ne donnent pas de contributions dans le calcul de la trace. Green, par contre, calcule ces commutateurs en utilisant en fait les propriétés des opérateurs $\mathcal{H}_\infty(\varepsilon)$ et obtient ainsi un résultat différent.

Nous allons illustrer ces points à l'aide d'un exemple simple. Considérons une seule variable x dans l'intervalle (0,1). Pour rendre hermitique et définir réellement l'opérateur $A(\varepsilon) = i\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon x$ dans l'intervalle considéré, nous imposons aux fonctions d'onde la condition aux limites $f(1) = f(0)$.

Les valeurs propres sont

$$E_n(\varepsilon) = 2n\pi + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{avec } n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \dots,$$

les fonctions propres

$$f_n(\varepsilon) = c\, e^{-i\left[E_n(\varepsilon)x - \varepsilon\frac{x^2}{2}\right]}.$$

En conséquence

$$\frac{\partial E_n(0)}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{2},$$

ce qui résulte aussi facilement du calcul de perturbation puisque

$$\int_0^1 f_n^*(0)\, x\, f_n(0)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \qquad \left[\frac{\partial A(0)}{\partial x} = x\right].$$

D'autre part il vient

$$\frac{\partial E_n^2(0)}{\partial\varepsilon} = 2E_n(0)\frac{\partial E_n(0)}{\partial\varepsilon} = E_n(0).$$

Si pour calculer $\frac{\partial E_n^2(0)}{\partial\varepsilon}$ nous voulions suivre une méthode analogue à celle de De Boer ou à celle de Green, nous devrions considérer les opérateurs et écrire

$$\frac{\partial A^2(0)}{\partial\varepsilon} = A(0)\frac{\partial A(0)}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial A(0)}{\partial\varepsilon}A(0)$$
$$= 2\frac{\partial A(0)}{\partial\varepsilon}A(0) + \left[A(0), \frac{\partial A(0)}{\partial\varepsilon}\right],$$
$$\frac{\partial E_n^2(0)}{\partial\varepsilon} = 2\int_0^1 f_n^*(0)\frac{\partial A(0)}{\partial\varepsilon}A(0)f_n(0)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_n^*(0)\left[A(0), \frac{\partial A(0)}{\partial\varepsilon}\right]f_n(0)\,\mathrm{d}x$$
$$= E_n(0) + \int_0^1 f_n^*(0)\left[A(0), \frac{\partial A(0)}{\partial\varepsilon}\right]f_n(0)\,\mathrm{d}x.$$

Dans un cas analogue de Boer affirme que le deuxième terme, qui implique le commutateur, est

([3]) J. Yvon, *Colloque de Mécanique statistique de Florence*, mai 1949. L'auteur utilise les conditions cycliques de Born comme conditions aux limites.

([4]) H. S. Green, *Physica*, 1949, p. 882.

([5]) De Boer, *Physica*, 1949, p. 843.

([6]) Nous suivons ici le développement de de Boer. Celui de Green lui est pratiquement équivalent.

nul, ce qui conduit au résultat correct. Si, en suivant l'esprit du calcul de Green, nous écrivons

$$\left[A(0), \frac{\partial A(0)}{\partial \varepsilon}\right] = \left[i\frac{\partial}{\partial x}, x\right] = i,$$

nous obtenons pour $\frac{\partial E_n^2(0)}{\partial \varepsilon}$ la valeur inexacte $E_n(0) + i$

En réalité, l'expression $A(0)\frac{\partial A(0)}{\partial \varepsilon}f_n(0)$ écrite ci-dessus n'a pas de sens : la fonction

$$\frac{\partial A(0)}{\partial \varepsilon}f_n(0) = x\,e^{-2\pi i n x}$$

ne satisfait pas à la condition de périodicité et même par prolongement il n'est pas possible de définir l'opérateur $A(0) = i\frac{\partial}{\partial x}$ pour cette fonction. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer le développement

$$x\,e^{-2\pi i n x} = \sum_k \left[\frac{\delta_{nk}}{2} - \frac{1-\delta_{nk}}{2\pi i(k-n)}\right] e^{-2\pi i k x},$$

où

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

L'opérateur $i\frac{\partial}{\partial x}$ appliqué au second membre donne

$$\sum_k \left[n\pi\delta_{nk} + \frac{1-\delta_{nk}}{i}\,\frac{n}{k-n}\right] e^{-2\pi i k x}.$$

Cette série ne converge pas en moyenne ce qui montre l'impossibilité du prolongement.

Cet exemple montre quelles erreurs peuvent s'introduire dans les calculs s'il n'est pas tenu compte de l'existence de conditions aux limites imposées aux fonctions d'onde et des modifications que celles-ci apportent aux propriétés des opérateurs.

Je tiens à remercier le Professeur J. Yvon de m'avoir conseillé d'entreprendre ce travail.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1950.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 11, MAI 1950, PAGE 243.

CONSIDÉRATIONS SUR LE MÉSON τ

Par Louis LEPRINCE-RINGUET et Charles PEYROU.
Laboratoire de l'École Polytechnique, Paris.

Sommaire. — Discussion des phénomènes observés favorables à l'existence d'un méson τ et des expériences systématiques entreprises pour trouver ce méson et qui ont donné des résultats négatifs.

Depuis plusieurs années, quelques photographies en faveur de l'existence d'un méson chargé (méson τ) de masse intermédiaire entre celle du méson π et celle du proton ont été présentées par divers auteurs [1 à 6].

La première [1] de ces photographies présente un électron de collision obtenu dans une chambre de Wilson avec champ magnétique; la masse de la particule incidente, mesurée en supposant la collision élastique, est de l'ordre de 1 000 m_0 (m_0, masse de l'électron).

La seconde photographie [2] obtenue dans une chambre de Wilson avec champ magnétique s'interprète comme la désintégration en vol d'un méson très lourd chargé donnant naissance à une particule neutre et à un méson chargé.

La troisième indication [3] présente deux étoiles observées dans une plaque photographique et reliées par un méson π négatif : la première étoile donne naissance au méson π et à d'autres branches habituellement observées dans les étoiles, et paraît due à une particule se dirigeant vers son centre et s'y arrêtant : l'aspect général de la trajectoire correspondante ainsi que le bilan d'énergie conduisent à attribuer à cette particule une masse supérieure à 800 m_0.

La quatrième [4] indication présente la trace d'une particule se terminant dans l'émulsion d'une plaque photographique après avoir parcouru une longueur visible de plus de 2 500 μ et donnant naissance à une étoile de trois trajectoires dont l'une est due à un méson π négatif lent facile à reconnaître, dont une autre paraît due aussi, d'après les données expérimentales à un méson π et dont la troisième ne peut être identifiée directement; l'étude du bilan d'énergie et d'impulsion de ces trois trajectoires, qui sont d'ailleurs coplanaires, est en faveur de la tripartition d'un méson τ en trois mésons.

La cinquième [5] est obtenue à la chambre de

Wilson avec champ magnétique dans des conditions analogues à celles de la seconde. Elle indique l'existence, au sein d'une gerbe provenant du plomb situé au milieu de la chambre, d'une particule chargée négativement et dont la masse est nettement supérieure à celle d'un méson π. Les indications d'ionisation et de courbure sont favorables à une particule négative dont la masse est de l'ordre de 1 000 m_0.

Ces photographies ont été discutées dans les publications correspondantes et nous ne ferons pas à nouveau de discussion générale, mais nous reviendrons sur certains points qui nous semblent intéressants. Depuis la publication de ces photographies, de nombreux travaux ont été effectués, notamment avec des plaques photographiques, et la quantité de documents actuellement dépouillés par les physiciens des divers laboratoires, s'est accrue d'une façon considérable.

Expériences systématiques. — En particulier, plusieurs séries d'expériences systématiques ont été effectuées : les unes par le groupe de Bristol, une autre par le groupe de l'École Polytechnique et une par le groupe de Berkeley.

Considérons, tout d'abord, cette dernière conduite par Brode, Fretter, Retallack [6]. Elle est essentiellement destinée à mesurer les masses des particules du rayonnement cosmique; elle s'adresse à des particules électrisées traversant d'abord une chambre de Wilson sans écran, courbées par un champ magnétique et se terminant enfin dans un des nombreux écrans d'une chambre de Wilson inférieure. La mesure, pour chaque trajectoire s'arrêtant dans un écran, de la déviation par le champ magnétique et du parcours après passage dans ce champ, donne la masse de la particule.

Alors que, dans la première expérience de Fretter avec 30 cm de plomb au-dessus de l'appareil, l'ensemble des résultats était cohérent avec une masse unique, à savoir celle du méson μ, Brode, dans une expérience ultérieure sans filtre de plomb, observe 15 particules dont la masse est intermédiaire entre le méson π et le proton : les six dont la masse est le mieux déterminée sont positives. Un tel nombre correspondrait, dans ces conditions d'expériences, c'est-à-dire dans un domaine de parcours compris entre 1 et 10 cm de plomb et au niveau du sol, à des proportions

$$\frac{\text{méson}\,\tau}{\text{méson}\,\mu} \sim \frac{1}{5}.$$

Pour vérifier ce fait, Peyrou et Lagarrigue ont utilisé sans plomb au-dessus de la chambre l'appareil décrit en 1948 [7] et fonctionnant à 1 000 m d'altitude à l'Argentière-la-Bessée, dans les Alpes françaises, appareil comportant une grande chambre de Wilson de 80 cm de hauteur avec champ magnétique de 2 500 gauss, sous laquelle sont installés divers trains de compteurs et diverses plaques d'absorbants. Cette expérience est, dans son principe, très proche de celle de Brode. Les résultats détaillés sont décrits dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [8].

La conclusion intéressant le méson τ est que l'on n'en a retrouvé aucun sur 16 protons et sur 45 mésons mesurés. Il n'y a donc pas confirmation des résultats de Brode ([1]). Avec un tel dispositif expérimental, la présence de masses aberrantes ne peut être envisagée avec une certaine garantie que si leur groupement est convenable et leur proportion notable; mais le fait de trouver un résultat négatif montre que la proportion de mésons τ est probablement inférieure à 2 pour 100 par rapport au méson ordinaire.

Une autre expérience systématique a été faite par Franzinetti [9] à Bristol au moyen de plaques photographiques placées l'une en face de l'autre à faible distance, un champ magnétique régnant dans l'espace séparant les deux plaques selon la technique de Powell et Rosenblum. Là encore, le résultat n'est pas positif : sur 30 mésons π et μ identifiés, aucune particule n'a été enregistrée comme étant avec certitude un méson τ, on retombe sur une proportion de mésons τ inférieure à 3 pour 100 environ.

Une troisième série d'expériences systématiques a été faite par le groupe de Bristol [10] (Fowler) en mesurant la masse des particules sortant des étoiles par l'observation de leur « scattering » dans l'émulsion. Là encore, il n'y a pas de certitude en faveur du méson τ : l'on trouve bien quelques points qui se placent sur la courbe de scattering des mésons τ ou dans le voisinage de cette courbe, mais leur présentation n'est pas symétrique par rapport à la courbe; il se peut donc que ce soient des protons un peu aberrants.

Or, on peut développer certaines considérations sur ces mesures. Prenons les dernières nommées : la statistique est effectuée en prenant des particules provenant d'étoiles, assez longues pour permettre une bonne mesure du scattering. La plupart des impulsions mesurées par cette méthode sont inférieures à 700 MeV : c, 20 pour 100 seulement des trajectoires correspondent à des impulsions supérieures à cette valeur.

Figurons les trois courbes donnant la densité de grains en fonction de l'inverse de l'angle moyen de scattering pour les mésons π, les mésons τ et les protons (*fig.* 1).

Les particules dont les points représentatifs tombent entre A et D sont des mésons π; de plus celles dont les points tombent entre D et B vont être

([1]) Dans une Communication récente (*Bull. Am. Phys. Soc.*, 1949, **24**, 8-15), Brode a annoncé qu'un examen plus critique des erreurs de la méthode rend suspecte l'interprétation des clichés de trajectoires considérées comme dues à des mésons τ. Il y a donc accord entre les diverses expériences systématiques de mesures de masse faites à la chambre de Wilson.

aussi considérées comme des π si l'on exclut l'existence de particules de plus faible masse. Si l'on envisageait l'existence de telles particules légères alors, la partie DB de la courbe serait suspecte et seule la partie AD compterait pour les mésons π.

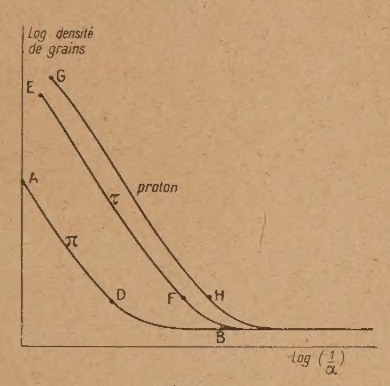


Fig. 1.
α, angle moyen de scattering;
α est proportionnel à $p\beta$:
p, impulsion de la particule; $\beta = \frac{v}{c}$.

D'autre part, la courbe des mésons τ n'est utilisable, pour une discrimination, que jusqu'à F : à droite de F, on se trouve en compétition avec les mésons ordinaires et aucune discrimination n'est possible. Dans cette région de moments, qui s'étend jusque vers 500 MeV : c, Fowler trouve 35 mésons π pour 0 mésons τ. On peut en conclure que la proportion des τ est inférieure à 3 pour 100 environ de celle des π.

Enfin, la courbe pour les protons est utilisable de G en H. Elle sera nécessairement bien balisée car les protons observés dans les étoiles, qui ne sont pas créés dans la désintégration, ont un spectre d'énergie très étalé et l'on pourra accumuler, sur la portion GH, un grand nombre de résultats.

On peut se demander si la comparaison des π et des τ dans un même domaine de moments est significative et cela à cause de l'incertitude sur la loi de production des divers types de mésons. On pourrait imaginer également d'effectuer la comparaison, non plus dans un même domaine de moments, mais dans un même domaine de *moments réduits* : dans ce cas, les conclusions de Fowler sont à modifier dans un sens moins défavorable au méson τ.

Mais on doit également considérer autre chose : comme les mésons sont produits dans les étoiles, et que les étoiles de moindre énergie sont les plus nombreuses, le nombre absolu des mésons τ produits dans les étoiles doit être très inférieur à celui des mésons π. Le nombre de phénomènes au cours desquels des mésons τ peuvent être produits sera donc très inférieur au nombre de ceux susceptibles de fournir des mésons π avec une probabilité du même ordre. Dans le même ordre d'idées remarquons que les mésons π détectés par Fowler ont le plus souvent une énergie inférieure à 150 MeV. On doit donc s'attendre à n'observer qu'une proportion faible de τ par rapport aux π.

L'ensemble des expériences systématiques et des considérations les accompagnant montre que l'on n'observe pas fréquemment des mésons τ, *mais cela n'infirme pas l'interprétation des cas particuliers cités au début de cet article.*

Dans l'exemple de la photographie obtenue par Powell [4], il paraît très difficile d'éviter l'interprétation de la tripartition d'un méson τ : en effet, le fait d'observer une particule dont la masse 1 000 est bien déterminée par la mesure du scattering est déjà un phénomène étonnant car la trajectoire a plus de 2 500 μ et se termine au sein de l'émulsion, ce qui permet une bonne mesure.

En second lieu, le fait d'observer une coïncidence parfaite entre l'extrémité de cette trajectoire et le centre d'une étoile est aussi étonnant, et le fait que cette étoile soit formée de trois trajectoires coplanaires dont l'une est sans aucun doute un méson π négatif, et dont l'une des autres, mesurée à nouveau tout récemment par la méthode de scattering, est aussi un méson π, est également très étonnant.

Des considérations analogues à celles qui viennent d'être développées pour le cliché de Powell peuvent aussi être données pour le cliché obtenu par notre groupe (²).

Sur ce cliché, la longueur du méson τ est notablement inférieure à celle du méson τ de Powell mais, d'une part, la coïncidence spatiale est excellente et, d'autre part, l'on observe simultanément, dans le même phénomène, une trajectoire de proton et une trajectoire de méson π, ce qui donne du poids au comptage de grains particulier du méson τ; l'argument fondamental de l'interprétation de ce cliché est d'ailleurs celui du bilan d'énergie.

Les deux aspects de notre cliché et de celui de Powell apparaissent d'ailleurs comme ne présentant pas de contradiction. Ils peuvent même être considérés comme complémentaires et correspondant, l'un à un méson τ négatif donnant une étoile, l'autre à un méson τ positif se décomposant en mésons plus légers.

Il est toutefois très curieux que l'accumulation considérable des résultats n'ait pas permis de retrouver à plusieurs exemplaires les mêmes phénomènes, ce qui aurait dû se produire dans le cas où il s'agirait effectivement de diverses manifestations du méson τ. Harding a présenté au Congrès d'Oxford

(²) Il n'est pas question, dans cet article, de la discussion des résultats obtenus par Alichanov et collaborateurs, discussion qui sera faite par J. Daudin dans un prochain numéro du *Journal de Physique*.

en mars 1950 deux cas de mésons τ analogues à celui de Powell.

Conclusion. — La position qu'il paraît raisonnable d'adopter en regard du méson τ nous semble être la suivante :

1° *Sélectivité des méthodes.* — Les méthodes de séparation des particules doivent être examinées avec beaucoup de soin car chacune d'elles est, en général, sélective : ainsi la discussion indiquée plus haut montre que, dans l'expérience de mesure des masses par « scattering », la méthode risque de défavoriser les mésons τ par rapport aux mésons π.

2° *Indépendamment de la sélectivité des méthodes.*— *a.* Dans les mesures systématiques de masses faites à la chambre de Wilson (Brode, Fretter, Peyrou et Lagarrigue), la très grande majorité des particules qui traversent la chambre, et dont la masse est mesurée, provient de l'atmosphère et n'a pas été produite localement. En ce cas, seules sont enregistrées des particules dont la vie moyenne est assez longue. En effet, on ne parvient pas à enregistrer une proportion importante de mésons π.

b. Les mesures systématiques de masses faites avec deux plaques photographiques et un champ magnétique (Franzinetti) échappent à cette critique puisqu'un grand nombre de mésons π, probablement produits pour la plupart dans la matière environnante, sont enregistrés. Cependant, ces expériences sont faites à 3 500 m, altitude à laquelle les phénomènes nucléaires sont surtout des phénomènes de faible énergie : d'ailleurs, la plupart des mésons π produits à cette altitude sont lents; il est possible que la production des mésons τ, même lents, qui exige beaucoup plus d'énergie, soit rare.

c. Dans l'expérience systématique de mesure des masses par scattering au départ du centre du phénomène nucléaire (Fowler), on peut supposer que le nombre des mésons τ produits par gerbe est très inférieur au nombre des π produits par gerbe, quoique l'on ne sache rien sur les propriétés respectives de production des τ et des π.

On voit donc que l'absence d'une proportion notable des mésons τ discriminés par les méthodes précédentes ne peut constituer un argument définitif en faveur de la non-existence de cette particule.

D'autre part, les phénomènes individuels rappelés plus haut ne peuvent actuellement, pour la plupart, être interprétés, ainsi qu'on l'a vu au cours de la discussion, qu'en admettant l'existence d'un méson τ.

Il est donc probable qu'une telle particule existe, mais sa discrimination échappe, en général, aux expériences systématiques, soit en raison du caractère sélectif des méthodes, soit en raison d'une faible abondance à la production, soit en raison d'une vie moyenne brève.

Manuscrit reçu le 25 janvier 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Leprince-Ringuet L. et Lhéritier M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1944, **219**, 618.

[2] Rochester et Butler. — *Nature*, 1947, **20**, 855.

[3] Leprince-Ringuet L., Hoang Tchang-Fong, Jauneau L. et Morellet D. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **226**, 1897.

[4] Brown, Camerini, Fowler, Muirhead, Powell et Ritson. — *Nature*, 1949, **163**, 82.

[5] Butler. Reporté par M. Blackett. — *Congrès de Côme.*

[6] Brode R. — *Congrès de Côme*, 1949.

[7] Peyrou et Lagarrigue. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 312.

[8] Peyrou, Lagarrigue et F. Bousser. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1058.

[9] Franzinetti. — *Phil. Mag.*

[10] Communication de Powell au Congrès d'Édinburg, septembre 1949 et Fowler, *Phil. Mag.*

SUR LA FOCALISATION DANS LES MONOCHROMATEURS A RÉSEAUX CONCAVES DANS LE VIDE EN INCIDENCE NORMALE POUR L'ULTRAVIOLET

Par Mme Simone ROBIN.

Laboratoire d'Enseignement de Physique, Sorbonne.

Sommaire. — La focalisation actuelle d'un monochromateur à vide à réseau concave en incidence normale est étudiée, indiquant ses avantages et ses inconvénients. Plusieurs autres systèmes de focalisation sont proposés pour ce même type d'appareil.

Un projet de monochromateur à réseau concave dans le vide pour l'ultraviolet lointain a été élaboré par M. Vodar vers 1943 et l'appareil construit par les Établissements Beaudouin est en service depuis quelques mois. Nous exposons ici les perfectionnements suggérés par l'usage de cet appareil et complétant les procédés précédemment décrits [2, 5].

Au moment où notre monochromateur a été terminé, il était, à notre connaissance, le seul appareil de ce type, c'est-à-dire à réseau en incidence normale pour l'ultraviolet à vide ([1]). Tout récemment Parkinson et Williams [4] ont décrit un appareil du même genre, et nous savons, d'autre part, qu'un autre appareil analogue est en construction aux États-Unis. Mais aucune discussion générale sur les procédés de focalisation n'a été publiée.

Cependant, pour les courtes longueurs d'onde (de 2 000 à 800 Å par exemple) le réseau ne s'écarte jamais beaucoup de la normale au faisceau lumineux et cela entraîne certaines possibilités ou incompatibilités mécaniques. Nous avons donc cru utile étant donné les nombreuses recherches à l'ordre du jour auxquelles un monochromateur pour l'ultraviolet lointain est susceptible de servir (photoconductivité, absorption, photoémission, etc.) d'exposer brièvement ici le cas particulier de focalisation d'un réseau, cas qui n'avait pas été considéré dans les publications précédentes [2, 5].

1° Il s'agit d'un système de focalisation approchée. Il a été utilisé sur notre monochromateur qui a été prévu à la fois pour être équipé d'un réseau concave ou d'un prisme de Féry. Il a l'avantage de s'adapter facilement à ces deux cas.

Une seule manivelle, manœuvrée de l'extérieur, assure un mouvement de translation et un mouvement de rotation au système dispersif, les fentes d'entrée et de sortie étant fixes.

Rappelons que, pour les prismes de Féry, la rotation se fait grâce à un bras de levier attaché à une extrémité à la plate-forme du prisme, à l'autre extrémité, il s'appuie sur une glissière [5] ([2]).

Pour le réseau, il est mécaniquement impossible, dans le cas des petites longueurs d'onde, d'utiliser ce procédé de focalisation géométriquement parfait, car le bras de levier se trouve presque perpendiculaire à la glissière. Le constructeur a tourné la difficulté en attachant le même levier à une extrémité à la plate-forme du réseau, l'autre extrémité étant fixée en un point tel que le bras de levier soit perpendiculaire à la glissière lorsque l'image centrale tombe sur la fente de sortie (bras qui est muni d'une coulisse de longueur variable).

En faisant la mise au point pour 1 550 Å, on obtient avec le spectre du premier ordre pour un réseau de 570 traits : mm et rayon $R = 1$ m, $f =$ distance de la fente d'entrée au réseau, $i =$ angle d'incidence, les résultats suivants (tableau I) :

Tableau I.

λ (Å).	Focalisation parfaite f (cm).	f réelle (cm).	$\frac{\Delta f}{f_{moyen}} \cdot 10^3$.
1250.....	99,94	100,16	2,2
1350.....	99,92	100,09	1,7
1550.....	99,90	99,90	0
1650.....	99,88	99,81	0,7
1800.....	99,86	99,69	1,7

Le calcul montre que la condition de focalisation du réseau dans ce cas est $\Delta f = k(\Delta i)^2$ et ici nous n'assurons qu'une correction de premier ordre par la relation $f = k\Delta i$. La focalisation n'est acceptable que pour un domaine spectral étroit. La précision du pointé des longueurs d'onde est suffisante car la translation de la vis de commande de la rotation est relativement grande.

2° On fixe le réseau pour une valeur moyenne de 2 000 Å de façon à assurer une focalisation rigoureuse pour cette longueur d'onde et l'on fait tourner le réseau autour de cette position. C'est le procédé utilisé par Parkinson et Williams [4]. On trouve

([1]) Pour cette région spectrale, les autres monochromateurs décrits sont ceux de Hilsch et Pohl [3] à prismes et celui de Baker [1] à réseau tangent.

([2]) *Erratum*. — Dans l'article côté [5], le point B (*fig.* 13) doit se trouver évidemment sur le cercle.

alors les résultats tableau II :

TABLEAU II.

λ (Å).	$\frac{\Delta f}{f_{moyen}} \cdot 10^3$.
1000.......	1,2
2000.......	0
3000.......	2

La précision du pointé des longueurs d'onde est indépendante de la focalisation et peut donc être suffisante.

3° On produit une rotation à l'aide d'une vis V_1 qui pousse et fait tourner en avançant un bras de levier solidaire de la plate-forme du réseau. En même temps, on produit une légère translation de la plate-forme du réseau à l'aide d'une vis V_2 de pas différent et solidaire de V_1. Le déplacement de V_2 étant proportionnel à Δi, la correction n'est pas parfaite.

Si l'on focalise exactement pour 1 000 et 4 358 Å, la valeur réelle de f est, entre ces longueurs d'onde

$$f_r = -2,1.10^{-4}\lambda + 100,16 \quad \text{(en cm)}.$$

De plus, pour une avance donnée de la vis commandant la rotation du réseau, ce dernier subissant simultanément une légère translation, on a une erreur d'incidence i due à cette translation. Mais comme celle-ci est faible, cette erreur est presque négligeable. Tout compte fait, on arrive au tableau III :

TABLEAU III.

λ (Å).	f réelle (cm).	$\frac{\Delta f}{f_{moyen}} \cdot 10^2$.
1000.....	99,95	0
2000.....	99,75	0,8
3000.....	99,54	0,9
4000.....	99,33	0,1
4358.....	99,22	0

Dans ce procédé, il est difficile de réaliser un bras de levier assez long pour obtenir une bonne précision pour le repérage des longueurs d'onde.

4° Le réseau est sur une plate-forme munie d'un bras de levier L. Cette plate-forme est solidaire d'une came s'appuyant sur une surface fixe. Le bras de levier L s'engage (entre deux rouleaux) dans une rainure d'une plate-forme P′ qui subit une translation x(cm). Cette translation entraîne la rotation du réseau et aussi celle de la came solidaire de la plate-forme P. La came peut être calculée pour assurer une focalisation pratiquement parfaite.

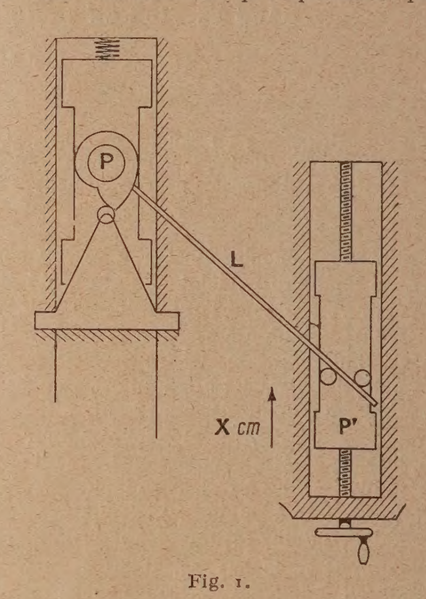


Fig. 1.

Quant à la précision du repérage de la rotation elle peut être extrêmement grande car la translation x de P′ est considérable et d'ailleurs sensiblement linéaire en fonction de la longueur d'onde. Si l'angle du bras L avec la normale du réseau est de 5°, on aboutit au tableau IV :

TABLEAU IV.

λ (Å).	$i + 5°$.	x (cm).
1000.....	6° 38′	73,53
2000.....	8 16	78,32
3000.....	9 54	81,32
4000.....	11 33	83,29
4358.....	12 8	83,80

On constate que la translation entre 1 000 et 4 358 Å est de 10,27 cm.

Manuscrit reçu le 27 février 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BAKER R. F. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1938, **28**, 55.
[2] FRAUDET Mlle G. et VODAR B. — *Rev. Opt.*, 1940, **19**, 50-66.
[3] HILSCH R. et POHL R. W. — *Z. fur Physik*, 1930, **59**, 812.
[4] PARKINSON W. W. Jr et WILLIAMS F. E. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1949, **39**, 705.
[5] VODAR B. — *Rev. Opt.*, 1942, **21**, 97-113.

Le Gérant : MAURICE BLONDIN. 134611 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1950.